



Unterrichtsmaterial

Von einer Reise zum Mars und wieso der Mond nicht auf die Erde fällt

Carl Peter Fitting

Inhaltsverzeichnis

1	Vorwort	4
2	Measuring the Earth	5
2.1	Die Maße der Erdkugel	5
2.2	Ein physikalischer Einschub	8
2.3	Die Masse der Erde	12
3	Das Eulerverfahren	14
4	Kegelschnitte	20
4.1	Ellipsen	20
4.1.1	Tangenten an Ellipsen	22
4.2	Hyperbeln	27
4.3	Parabeln	30
5	Dynamik	33
5.1	Kreisbewegungen	33
5.2	Arbeit und Energie	35
5.3	Fluchtgeschwindigkeit	38
5.4	Keplers zweites und drittes Gesetz	39
5.5	Endlich: Kegelschnitte im Weltall	42
5.6	Apsiden	43
6	Eine Reise zum Mars	47
7	Raketenantrieb	50

Kapitel 1

Vorwort

Die „Himmelsmechanik“ stellt einen fundamentalen Denkschritt der Menschheit dar: War es möglich, über die reine Beschreibung des Laufes der Gestirne und Planeten hinaus Begrifflichkeiten für „Ursachen“ zu finden, die die Beobachtungen nicht nur bestätigten, sondern auch darüber hinaus Prognosen über zukünftige Konstellationen zu treffen? Ist es dem menschlichen Geist mit seinen an das Leben auf der Erde gebundenen Begrenzungen möglich, zu „verstehen“, wie die seinem materiellen Zugriff doch vollständig entzogenen fernen Planeten miteinander wechselwirken, wie ihre Bahnen über unseren Sternenhimmel beschaffen sind?

Die ursprünglichen Vorstellungen waren von religiösen Überzeugungen von der Natur der göttlich geschaffenen Welt geprägt und hatten durchaus dogmatischen Charakter. Die genaue Beobachtung des Sternenhimmels jedoch, die mit einer verbesserten instrumentellen Ausstattung einher gehen musste, ergab Widersprüche zu diesen Modellen; als *Johannes Kepler* (1571-1630) im Jahre 1600 nach Prag berufen wurde, konnte er sich auf die sehr genauen Messungen von *Tycho Brahe* (1546-1601) beziehen und entwickelte drei grundlegende mathematische Formulierungen, die so genau mit den Daten übereinstimmende Ableitungen erlaubten, dass sie als „**Keplersche Gesetze**“ bis heute bekannt sind. Kepler fand seine Gesetze durch reine Beobachtung; ihm standen der mathematische Apparat und die physikalischen Erkenntnisse, die seine Gesetze in allgemeinere Zusammenhänge „begründend“ einordneten, nicht zur Verfügung. Seine Überlegungen nahmen 9 Jahre in Anspruch; im Jahre 1609 erschien sein Werk *Astronomia nova*, welches das erste und zweite Keplersche Gesetz für die Marsbahn enthielt. Diese Leistung erscheint aus heutiger Sicht beinahe unfassbar.

Isaac Newton (1643-1727) bettete die Keplerschen Gesetze in eine allgemeinere Theorie der Mechanik ein – und benutzte dazu eine neuartige mathematische Theorie, die heute Analysis genannt wird. Gegen Ende des 19. Jahrhunderts galten damit mechanische Probleme als im Prinzip gelöst. Dass *Albert Einstein* (1879-1955) in seiner allgemeinen und speziellen Relativitätstheorie sie als Näherungen identifizierte, die nur für nicht allzu schnelle Bewegungen nicht allzu schwerer Objekte die „Realität“ beschrieben, entwertet Keplers und Newtons Leistungen in keiner Weise.

Kapitel 2

Measuring the Earth

2.1 Die Maße der Erdkugel

Dass die Erde keine scheibenförmige Gestalt hat, ist schon in der Antike bekannt. Von *Eratosthenes von Kyrene* (276 v.Chr - 195 v.Chr.), einem Freund von *Aristoteles* und dem Leiter der Bibliothek von Alexandria, stammt eine erste geometrische Bestimmung des Erdradius und des Erdumfanges, wobei Eratosthenes von einer kugelförmigen Gestalt der Erde ausging.

Er ging weiter davon aus, dass die Strahlen der Sonne parallel auf die Erde treffen. Das widerspricht zwar den meisten Kinderzeichnungen, ist aber in der Realität in sehr guter Näherung der Fall.

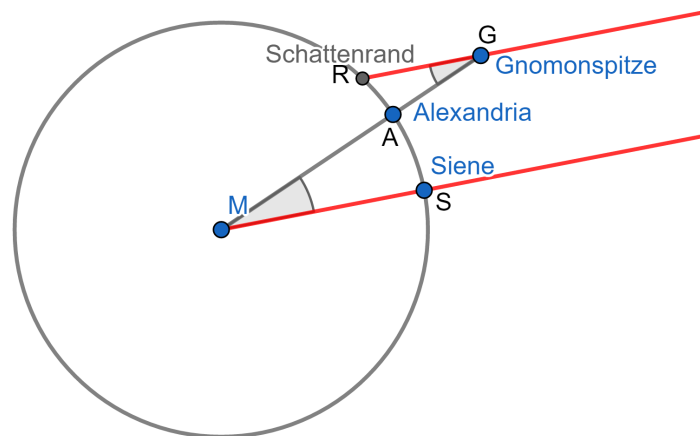
Eratosthenes fiel auf, dass an einem bestimmten Tage das Sonnenlicht genau senkrecht in einen Brunnen in Siene (heute Assuan) fiel, während am gleichen Tage in Alexandria ¹ mithilfe eines *Gnomons* gemessen wurde, dass die Sonnenstrahlen in einem Winkel von $7,2^\circ$ gegen die Lotrechte einfielen. Ein Gnomon ist eine Art „Schattenwinkelmesser“: Ein waagrecht stehender Stab wirft im Sonnenlicht einen Schatten, und den Winkel kann man auf einer Skala, die in einer Halbkugel, einer „Skaphe“, die um den Fußdes Gnomons angebracht ist, ablesen. ²

¹Eratosthenes ging davon aus, dass Alexandria genau nördlich von Siene lag, und das stimmt auch beinahe: der Längengradunterschied beträgt nur 3°

²Das Bild ist Wikipedia entnommen; es zeigt die Skaphe eines solchen Sonnenwinkelmessers (auch Heliotrop genannt); der waagrecht liegende Gnomon ging verloren. Leider ist die Entstehungszeit des gezeigten Heliotrops nicht ersichtlich.



Eratosthenes soll einen Freund gebeten haben, die Entfernung zwischen Siene und Alexandria zu bestimmen, und er erhielt einen Wert von 5.000 Stadien. Die folgende Skizze zeigt die Situation:



Da die beiden eingezeichneten Winkel als Stufenwinkel an Parallelen gleich groß sind, ergibt sich der Erdumfang U , wenn man bedenkt, dass die Bogenlänge auf einem Kreis proportional zum überspannten Mittelpunktswinkel ist, zu

$$\frac{7,2^\circ}{360^\circ} = \frac{\overline{SA}}{U} \Leftrightarrow U = 50 \cdot \overline{SA} = 250.000 \text{ Stadien}$$

Bedauerlicherweise ist nicht völlig klar, welches in der heutigen Einheit Meter ausgedrückte Maß dem damals gebräuchlichen *Stadium* entspricht. In Anlehnung an *Plinius* könnte man davon ausgehen, dass 40 Stadien einer Streckenlänge von 6.300 m entsprachen. So ergäbe sich ein Erdumfang von $\frac{250.000}{40} \cdot 6.300$ m, also von 39.375 km. Dem entspräche ein Erdradius von 6.266,7 km. Heute wissen wir, dass dieser Wert etwas zu klein ist; der tatsächliche

Erdradius am Äquator beträgt 6.371 km. Eratosthenes hat als erster eine in Längen- und Breitengrade geteilte Karte der damals bekannten Welt entworfen; auch seine hier gezeigte Methodik rechtfertigt es, dass er sich als Erster als *Philologe* (= Freund aller Gelehrsamkeit) bezeichnete.

Wenn man sich die Erde also als Kugel mit einem Radius von 6.371 km vorstellt³, so ist die nächste für unser Vorhaben offensichtlich relevante Frage die nach der *Masse* der Erde. Dabei bedarf der Begriff der Masse einer genaueren Überlegung.

Auf der Erde kennen wir „Masse“ als jene Eigenschaft, die etwa ein Handy dazu bringt, aus der Hemdentasche zu fallen und ein neues Display einzufordern - oder jene Größe, die man mit Hilfe einer Balkenwaage und geeichten Probekörpern bestimmt. Da die Erde jedoch weder „auf die Erde fallen“ kann noch gut auf eine Balkenwaage passt, muss es eine Beschreibung von „Masse“ geben, die nicht an ein auf der Erde mögliches Experiment gebunden ist. Immerhin konnte man aber auf die beschriebene „irdische“ Weise eine Masseneinheit 1 kg durch einen definierten und sehr sorgfältig aufbewahrten Probekörper, das „Urkilogramm“, festlegen.

Die verallgemeinerte Beschreibung des Begriffs *Masse* gelang Isaac Newton, in dem er als fundamentales Modell den Begriff der *Kraft* bedachte. Kräfte werden durch Vektoren beschrieben; sie besitzen also eine Größe (zeichnerisch dargestellt durch die Länge des den Vektor repräsentierenden Pfeiles) und auch eine Richtung. Das Zusammenspiel von Massen und Kräften beschrieb er in drei Axiomen, also Lehrsätzen, deren Gültigkeit als gegeben betrachtet wird:

(a) *Gesetz von der gleichförmigen Bewegung*

Wenn auf einen sich bewegenden Körper keine Kraft wirkt, so bewegt sich dieser Körper mit gleichbleibender Geschwindigkeit in unveränderter Richtung.

(b) *Gesetz von der Massenträgheit*

Wenn auf einen Körper mit der Masse m eine Kraft \vec{F} wirkt, so verändert sich dadurch die Geschwindigkeit des Körpers in ihrem Betrag und je nach Krafrichtung ändert sich auch die Bewegungsrichtung. Diese Beschleunigungen (welche der Körper erfährt und die unten genauer beschrieben werden) sind umgekehrt proportional zur Masse m des Körpers, auf den die Kraft wirkt.

(c) *Gesetz „actio = reactio“*

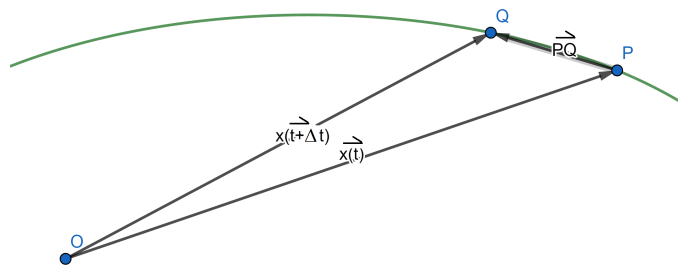
Wenn von einem Körper A eine Kraft auf einen Körper B ausgeht, so wirkt stets auch eine Kraft von Körper B auf Körper A , die gleiche Größe wie die erstgenannte Kraft besitzt, dieser jedoch entgegengerichtet ist.

³Tatsächlich hat die Erde keine genau kugelförmige Gestalt, sondern ist an den Polen „abgeplattet“

Das zweite Axiom zeigt einen Weg, Massen dadurch zu bestimmen, dass man ihre Reaktion (Geschwindigkeitsänderung) auf wirkende und bekannte Kräfte misst. Um das genauer zu verstehen, bedarf es eines physikalischen Einschubes.

2.2 Ein physikalischer Einschub

Wir müssen uns zunächst anschauen, wie man die Geschwindigkeit eines Körpers erfasst. Den Punkt P , an dem sich ein Körper zu einem Zeitpunkt t aufhält, beschreiben wir – von irgendeinem Punkt O aus gesehen – durch einen Vektor $\vec{x}(t)$, der von O zum Punkt P weist. Eine ganz kurze Zeit Δt später befindet sich der Körper schon an einem anderen Punkt Q seiner Bahnkurve, und dieser wird beschrieben durch $\vec{x}(t + \Delta t)$. Der Vektor \vec{PQ} weist einerseits die *Richtung* an, in der der Körper sich während der kurzen Zeitspanne bewegt hat, und seine Länge gibt die *Streckenlänge* wieder, die der Körper während des Zeitintervalls zurückgelegt hat. Weil beide Informationen in einem einzigen Vektor „gespeichert“ sind, bieten sich Vektoren für Bewegungsbeschreibungen besonders an.



Der Vektor $\frac{1}{\Delta t} \cdot \vec{PQ}$ weist also die Bewegungsrichtung von P nach Q an, und seine Länge entspricht der *Durchschnittsgeschwindigkeit* des Körpers in der Zeitspanne von t bis $t + \Delta t$. Für sehr kurze Zeitspannen liegen P und Q sehr nahe beieinander auf der Bahnkurve; \vec{PQ} weist nun (beinahe) in *Richtung der Tangente* an die Bahnkurve im Punkt P , und der in gleiche Richtung weisende Vektor $\frac{1}{\Delta t} \cdot \vec{PQ}$ besitzt als Länge (beinahe) die *Momentangeschwindigkeit* des Körpers auf seinem Wege.

Der intuitiv existierende Vektor (der vielleicht technisch schwierig zu ermitteln ist), dessen Richtung **genau** der Tangente an die Bahnkurve folgt und dessen Länge **genau** die *Momentangeschwindigkeit* des Körpers darstellt, heißt *Geschwindigkeitsvektor* und wird gerne mit $\vec{v}(t)$ bezeichnet. Der Buchstabe v leitet sich aus dem englischen Wort *velocity* für „Geschwindigkeit“ ab; für eine bloße Zahlangabe zur Geschwindigkeit (also ohne die enthaltene Richtungsinformation) wird die Vokabel *speed* verwendet.

Wenn wir im Folgenden über einem Vektorsymbol \vec{v} den Pfeil weglassen, also v schreiben, so bezeichnen wir so die Länge des Vektors, die wir auch seinen *Betrag* nennen.

Übung 2.1. Ein Körper bewegt sich in einem Koordinatensystem so, dass er sich t Sekunden nach Beginn der Aufzeichnungen im Punkt $P(3 \cdot t \mid 25 - 5 \cdot t^2)$ befindet. Die x -Achse des Koordinatensystems liegt „auf der Erdoberfläche“, die y -Achse ragt wie ein Turm senkrecht aus dem Punkt $O(0|0)$ empor; beide Achsen sind mit Einheiten der Länge 1 m skaliert.

- (a) Berechnen Sie, in welchem Punkt der Körper auf der Erdoberfläche aufschlägt!
- (b) Berechnen Sie den Durchschnittsgeschwindigkeits-Vektor, der zur Bewegung des Körpers in der Zeitspanne von t bis $t + \Delta t$ gehört, in Abhängigkeit von t und Δt !
- (c) Begründen Sie aus Ihrem Ergebnis der vorigen Teilaufgabe, dass $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ -10 \cdot t \end{pmatrix}$ ein plausibler Kandidat für den Geschwindigkeitsvektor zur Zeit t ist.

Lösung 2.1. (a) Wenn die y -Komponente den Wert 0 besitzt, so ist der Körper auf der Erdoberfläche aufgeschlagen. Das ist zu jenem Zeitpunkt der Fall, für den $25 - 5t^2 = 0$ gilt: nach $t = \sqrt{5} \approx 2,24$ s trifft der Körper auf den Boden auf. Sein Aufschlagpunkt hat die Koordinaten $P(6,71 \mid 0)$.

- (b) Offenbar ist

$$\vec{PQ} = \vec{OQ} - \vec{OP} = \begin{pmatrix} 3(t + \Delta t) \\ 25 - 5(t + \Delta t)^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3t \\ 25 - 5t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\Delta t \\ -10t\Delta t - 5(\Delta t)^2 \end{pmatrix}.$$

Damit ergibt sich die Durchschnittsgeschwindigkeit zu

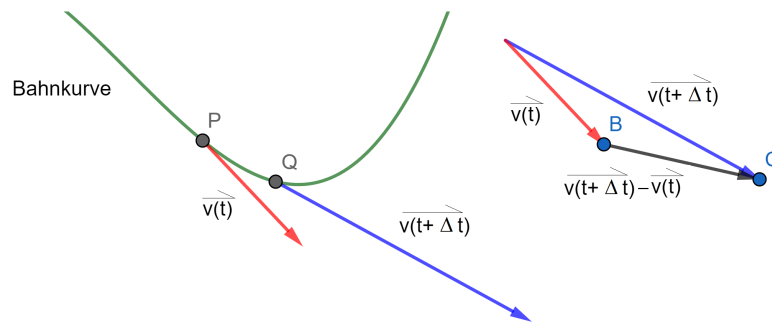
$$\frac{1}{\Delta t} [\vec{OQ} - \vec{OP}] = \begin{pmatrix} 3 \\ -10t - 5\Delta t \end{pmatrix}.$$

- (c) Wenn man sich im letzten Ergebnis für die Größe Δt immer kürzere Zeitintervalle vorstellt, so spielt in der v_y -Komponente der Subtrahend $-5\Delta t$ „keine Rolle mehr“; vernachlässigt man ihn, so entsteht der gegebene Vektor für die Momentangeschwindigkeit.

Wenn nun zu jedem Zeitpunkt t die Geschwindigkeit $\vec{v}(t)$ bekannt ist, so können wir die „momentane Änderungsgeschwindigkeit der Geschwindigkeiten“ ganz analog zu dem eben geschilderten Vorgehen erfassen, wenn wir für sehr kurze Zeitspannen Δt den Vektor

$$\vec{a}_D = \frac{1}{\Delta t} \cdot (\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t))$$

anschauen. Seine Größe gibt an, mit welcher Geschwindigkeit sich die Momentangeschwindigkeit ändert, und seine Richtung weist in jene Richtung, in der sich der Tangentialvektor $\vec{v}(t)$ während der Zeitspanne Δt zum Vektor $\vec{v}(t + \Delta t)$ ändert. Der Vektor heißt *Durchschnittsbeschleunigung* der Bewegung im Zeitintervall von t bis $t + \Delta t$.



In der Skizze ist erkennbar, dass der Körper einerseits auf dem Wege von P nach Q an Geschwindigkeit (speed) zugelegt hat und dass sich andererseits seine Bewegungsrichtung geändert hat. Beides spiegelt sich in dem Vektor $\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)$ wider.

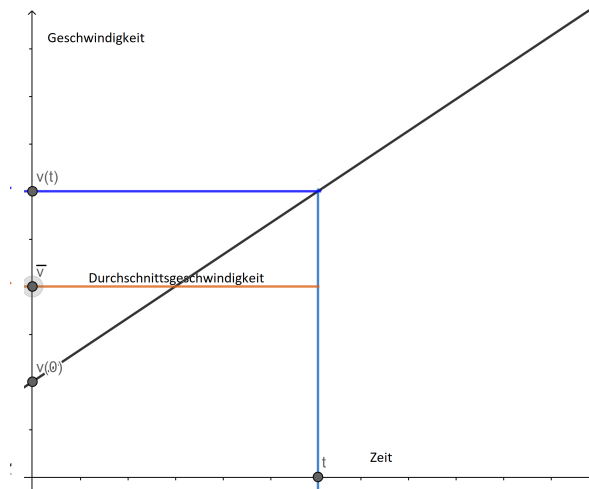
Für sehr kurze Zeiten erhält man den sogenannten *Momentanbeschleunigungsvektor*, der üblicherweise mit \vec{a} (von engl. acceleration) bezeichnet wird. Wenn etwa die Geschwindigkeit eines Körpers in Metern pro Sekunde, also $\frac{\text{m}}{\text{s}}$, gemessen wird, so ergibt sich für seine momentane Beschleunigung eine Größe in der Einheit $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Nun können wir Newtons zweites Axiom mathematisch fassen: Es sagt aus, dass die Kraft \vec{F} auf die Bewegung einer Masse der Größe m Einfluss durch eine Beschleunigung \vec{a} nimmt, und dass dabei gilt:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} .$$

Diese Gleichung ist eine der *Grundgleichungen der Mechanik*. Man hat die Einheit für die Kraftmessung so festgelegt, dass in dieser Gleichung der Proportionalitätsfaktor 1 auftritt: ein Körper der Masse 1 kg, der sich nur geradlinig (und reibungsfrei) auf einer Schiene bewegen kann, erfährt eine Kraft von 1 Newton ($1\text{N} = 1 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2}$), wenn er innerhalb von einer Sekunde durch die Kraft um $1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ beschleunigt wird.

Der einfachste Fall ist der, dass sich ein Körper (gedacht als Punkt mit der Masse m) auf einer Geraden reibungsfrei bewegt und auf ihn eine der Größe nach zeitlich konstante Kraft F genau in der Bewegungsrichtung wirkt. Diese Kraft bewirkt nach Newtons zweitem Gesetz also eine konstante Beschleunigung vom Betrag $a = \frac{F}{m}$. Das bedeutet nun wiederum, dass die Geschwindigkeit des Körpers zunimmt; betrug sie am Anfang etwa v_0 , so wird die Geschwindigkeit linear zunehmen, nach der Zeit t also den Wert $v(t) = v_0 + t \cdot a$ besitzen; das ist im folgenden Diagramm dargestellt. Wo befindet sich also der Körper zur Zeit t ? Wenn seine Anfangsposition x_0 genannt war, so bewirkt die Bewegung mit zunehmender Geschwindigkeit im Zeitintervall von 0 bis t Sekunden offenbar das Gleiche, als hätte sich der Körper gleichförmig mit der Durchschnittsgeschwindigkeit bewegt, die in diesem Intervall auftrat.



Diese lässt sich aus dem Diagramm aber ablesen: sie beträgt offenbar $\bar{v} = v_0 + \frac{v(t)-v_0}{2}$. Also befindet sich der Körper zum Zeitpunkt t am Ort

$$x(t) = x_0 + t \cdot \bar{v} = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{a}{2} \cdot t^2.$$

Dieses *Gesetz der gleichmäßig beschleunigten Bewegung* werden wir immer wieder anwenden, wenn wir komplexere Situationen betrachten.

Wir verdanken Newton eine weitere fundamentale Erkenntnis, nämlich die der *Gravitation*. Newton ging davon aus, dass zwischen zwei gegebenen (idealerweise punktförmigen) Körpern mit den Massen m_1 und m_2 stets eine Anziehungskraft wirkt, die zu beiden Massen proportional und umgekehrt proportional zum Quadrat des Abstandes r der beiden Massen entlang der Verbindungsstrecke der beiden Massenpunkten wirkt. Mathematisch wird das – mit einem noch unbekanntem Proportionalitätsfaktor γ – ausgedrückt durch die Gleichung

$$F_{12} = \gamma \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}.$$

Natürlich wirkt – nach dem dritten Axiom – auf den zweiten Körper eine gleich große Kraft, die der erstgenannten entgegengesetzt gerichtet ist. Wenn der erste Körper aber eine sehr große Masse im Vergleich zu dem zweiten hat, so erfährt er – bei gleicher Kraft – eine viel geringere Beschleunigung als der zweite: er wird „kaum in Bewegung gekommen sein“, bevor sich der zweite Körper bereits „auf ihn gestürzt“ hat. Wir gehen im Folgenden davon aus, dass wir über Planeten sprechen, die sich im Sonnensystem befinden. Da die Sonne viel mehr Masse als die Planeten hat, betrachten wir den Standort der Sonne näherungsweise als konstant.⁴

Es wird berichtet, dass Isaac Newton diese Idee bekam, während er nachdenklich im Garten ruhte und ihm ein Apfel vom Baum auf den Kopf fiel. Und doch ist diese Idee sehr erstaunlich, sagt sie doch, dass nicht nur die Erde den Apfel anzieht (wodurch er fällt), sondern

⁴Zum Beispiel hat die Sonne eine ca. 335000 mal so große Masse wie die Erde.

auch der Apfel die Erde (die ihm entgegenzelen müsste). Auch kosmologisch ist die Aussage erstaunlich: wenn doch die Sonne die Erde anzieht, dann müsste diese doch in die Sonne stürzen, und der Mond auf die Erde...

Die experimentelle Bestimmung der *Gravitationskonstante* γ gelang *Lord Cavendish* im Jahre 1789 (also gut 60 Jahre nach Newtons Tod). Das Experiment mit seiner „Gravitationswaage“ kann man in der Schule durchführen, doch soll es in diesem Rahmen nicht beschrieben werden; der in diesem Skript verwendete Wert ist $\gamma = 6,673 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2}$.

Nun sind leider real auftretende Körper selten punktförmig. Mit mathematischen Methoden, die hier nicht dargestellt werden können, kann man jedoch beweisen, dass zwei kugelförmige Körper (mit rotationssymmetrischer Massenbelegung) einander so beeinflussen, als gingen die Gravitationskräfte vom jeweiligen Kugelmittelpunkt aus.

2.3 Die Masse der Erde

Stellen wir uns einen kugelförmigen homogenen Körper vor, der die Masse m besitzt. Man kann direkt messen, mit welcher Kraft dieser Körper von der Erde angezogen wird; diese Kraft („das Gewicht“) ist tatsächlich ortsabhängig, aber die Schwankungen sind nicht sehr groß. Da die Kraft proportional zu m ist, erfahren alle Körper dieser Masse dieselbe Beschleunigung, wenn sie auf die Erde fallen; der Wert $g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ ist eine gute Näherung für die Fallbeschleunigung. Man kann diesen Wert mit einem Stein und einer Stoppuhr nachmessen.

Die Anziehungskraft geht von der Erde als Gravitationskraft aus; wenn man die Erde als kugelförmig und rotationssymmetrisch in Schichten aufgebaut denkt, ergibt sich nach dem Newton'schen Gravitationsgesetz mit der Erdmasse M_{Erde} und dem Erdradius $R_{\text{Erde}} = 6,371 \cdot 10^6$ m die Gleichung

$$\gamma \cdot \frac{m \cdot M_{\text{Erde}}}{R_{\text{Erde}}^2} = m \cdot g.$$

Alle Werte bis auf M_{Erde} sind nun zahlenmäßig bekannt, und deshalb kann M_{Erde} ausgerechnet werden:

$$M_{\text{Erde}} = \frac{G \cdot R_{\text{Erde}}^2}{m \cdot \gamma} \approx 5,976 \cdot 10^{24} \text{kg}.$$

Cavendish hatte mit seinem Experiment also „die Erde gewogen“.

Übung 2.2. Ein Astronaut stellt fest, dass er auf der Erde eine Kiste der Masse $m = 85$ kg gerade noch mit Muskelkraft anheben kann. Später auf dem Mond bemerkt er, dass ihm das Anheben der gleichen Kiste viel leichter fällt. Berechnen Sie, welche Masse er auf dem Mond anheben könnte; gehen Sie davon aus, dass der Mond kugelförmig mit einem Radius von $r_{\text{Mond}} = 1.738$ km sei und eine Masse von $M_{\text{Mond}} = 7,35 \cdot 10^{22}$ kg besitze.

Lösung 2.2. Nach Newtons Gravitationsgesetz wirkt auf dem Mond auf einen Körper der Masse m kg eine Kraft von

$$F = \gamma \frac{m \cdot M_{\text{Mond}}}{r_{\text{Mond}}^2} \approx m \cdot 1,624 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Wenn man nun die Kraft, die der Astronaut aufbringen kann, berechnet, so ergibt sich $F = 85\text{kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 833,85\text{N}$. Gleichsetzen der beiden Terme ergibt eine Masse von $m = \frac{833,85}{1,624} \text{kg} \approx 513,5 \text{kg}$, die der Astronaut auf dem Mond gerade noch anheben könnte. Das ist die gut 6-fache Masse des auf der Erde Möglichen.

Kapitel 3

Das Eulerverfahren

Wenn wir mit Newtons Gravitationsgesetz umgehen, so müssen wir bedenken, dass die Gravitationskräfte sich mit dem Aufenthaltsort des Körpers, der ihnen ausgesetzt ist, ändern. Während der Bewegung eines Körpers wirken also in jedem Moment neue Kräfte, die wiederum eine Beschleunigung, also eine Geschwindigkeitsänderung (in Größe und Richtung) verursachen... Dies mathematisch zu verfolgen kann recht aufwendig sein; wenn man jedoch die Bewegungszeit in hinreichend kurze Zeitintervalle Δt zerlegt, so kann man die Bewegung "Punkt für Punkt" verfolgen. Das Verfahren trägt den Namen von *Leonhard Euler* (1707-1783), eines der bedeutendsten Mathematiker und Physiker. Dies soll hier erklärt werden; um unnötigen Umgang mit Zahlkonstanten zu vermeiden, vereinfachen wir die Sache etwas und gehen von folgender idealisierten Situation aus:

In einem kartesischen Koordinatensystem befindet sich ein Körper der Masse 3 zur Zeit $t = 0$ im Punkt $P(1 \mid 0)$ und ist dort gerade mit dem Geschwindigkeitsvektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ angekommen. Im Nullpunkt $O(0 \mid 0)$ des Koordinatensystems befindet sich eine ortsfeste Masse, die den Körper anzieht; wenn er sich an einem Ort $Q(x \mid y)$ in der Entfernung $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ vom Ursprung befindet, so wirkt auf ihn eine Kraft der Größe $\frac{1}{r^2}$, die immer auf den Nullpunkt des Koordinatensystems gerichtet ist. Diese Kraft können wir als Vektor beschreiben: offenbar hat sie die Richtung $\begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$, und dieser Vektor muss nur noch so mit einer Zahl multipliziert werden, dass seine Länge die korrekte angegebene Größe der Kraft annimmt. Da $\begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$ auch wieder die Länge r hat, ist also $\vec{F} = \frac{1}{r^3} \cdot \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix}$ mit

$$F_x = \frac{-x}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$F_y = \frac{-y}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Schauen wir uns nun an, was innerhalb eines kurzen Zeitintervalles Δt geschieht. Auf unseren Körper wirkt am Aufenthaltsort eine Kraft von

$$F_x = \frac{-1}{(1^2 + 0^2)^{\frac{3}{2}}} = -1,$$

$$F_y = \frac{-0}{(1^2 + 0^2)^{\frac{3}{2}}} = 0.$$

Diese Kraft bewirkt eine Beschleunigung des Körpers, die sich nach dem zweiten Newtonschen Axiom berechnet zu

$$a_x = \frac{1}{3} \cdot \frac{-1}{(1^2 + 0^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{3},$$

$$a_y = \frac{1}{3} \cdot \frac{-0}{(1^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} = 0.$$

Dadurch verändert sich der Geschwindigkeitsvektor; die für eine sehr kurze Zeitspanne Δt näherungsweise gültige Gleichung

$$\vec{a}(t) = \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t}$$

stellen wir um zu

$$\vec{v}(t + \Delta t) = \vec{v}(t) + \vec{a}(t) \cdot \Delta t$$

und finden, dass sich der Körper zum Zeitpunkt $0 + \Delta t$ mit den Geschwindigkeitskomponenten

$$v_x(\Delta t) = 0 + \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \Delta t$$

$$v_y(\Delta t) = 1 + 0 \cdot \Delta t$$

bewegt.

Wir gehen - die Zahl erscheint intuitiv als ziemlich klein - von $\Delta t = 0,01$ aus und finden rechnerisch den Geschwindigkeitsvektor

$$\vec{v}(\Delta t) = \begin{pmatrix} -0,00\bar{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Mit diesem Geschwindigkeitsvektor bewegt sich der Körper also weiter; die näherungsweise gültige Gleichung, in der $\vec{r}(t)$ den Ortsvektor zum Aufenthaltsort des Körpers beschreibt,

$$\vec{v}(t) = \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$$

stellen wir wieder um zu

$$\vec{r}(t + \Delta t) = \vec{r}(t) + \vec{v}(t) \cdot \Delta t$$

und finden den Aufenthaltsort nach Ablauf der Zeitspanne Δt zu

$$x(\Delta t) = 1 + 0 \cdot \Delta t = 1$$

$$y(\Delta t) = 0 + 1 \cdot \Delta t = 0,01$$

Wir haben also näherungsweise den Aufenthaltsort des Körpers nach $0,01$ Zeiteinheiten bestimmt. Aus diesen Angaben können wir in gleicher Weise die nun wirkende Kraft, daraus die nun wirkende Beschleunigung, daraus die neue Geschwindigkeit und schließlich den Aufenthaltsort zur Zeit $2 \cdot \Delta t$ berechnen.

Übung 3.1. Führen Sie die Rechnungen für die Ortsbestimmungen zu den Zeitpunkten 0, 0,02 und 0,03 aus!

Lösung 3.1. Die Werte ergeben sich aus der untenstehenden Tabelle.

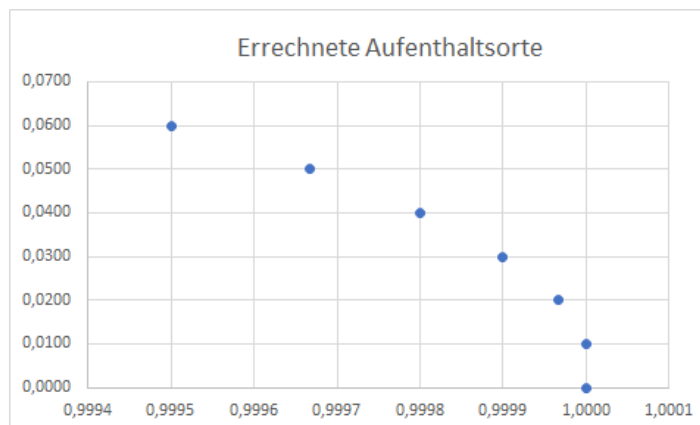
Das Verfahren kann aus mehreren Gründen nur einen näherungsweise zutreffenden Bahnverlauf beschreiben.

- (a) Wir sind davon ausgegangen, dass während der ganzen Zeitspanne Δt die gleiche Kraft auf den Körper wirkt; tatsächlich wirkt aber in jedem Punkt der Bahnkurve eine andere Kraft auf den Körper.
- (b) Wir sind davon ausgegangen, dass der Nullpunkt des Koordinatensystems ein unbeweglich feststehendes Kraftzentrum ist. Wenn es sich wirklich um Gravitationskräfte handelt, so sollte nach Newtons drittem Axiom aber auch eine beschleunigende Kraft auf den im Nullpunkt befindlichen Körper wirken, die dessen Ort verändert. Diese Vereinfachung ist oben schon diskutiert worden.

Für die sich ständig wiederholenden Rechnungen bietet sich die Verwendung einer Tabellenkalkulation an. Die folgende Abbildung zeigt die ersten Zeilen einer solchen Tabelle.

Zeit	Ort		Geschwindigkeit alt		Kraft		Beschleunigung		Geschwindigkeit neu		Ort neu	
	x-Koord.	y-Koord.	x-Koord.	y-Koord.	x-Koord.	y-Koord.	x-Koord.	y-Koord.	x-Koord.	y-Koord.	x-Koord.	y-Koord.
0	1,00000000	0,00000000	0,00000000	1,00000000	-1,00000000	0,00000000	-0,33333333	0,00000000	-0,00333333	1,00000000	1,00000000	0,01000000
0,01	1,00000000	0,01000000	-0,00333333	1,00000000	-0,99985002	-0,00999850	-0,33328334	-0,00333283	-0,00666617	0,99996667	0,99996667	0,02000000
0,02	0,99996667	0,02000000	-0,00666617	0,99996667	-0,99946689	-0,01999000	-0,33315563	-0,00666333	-0,00999772	0,99990004	0,99990000	0,02999967
0,03	0,99990000	0,02999967	-0,00999772	0,99990004	-0,99885103	-0,02996819	-0,33295034	-0,00998940	-0,01332723	0,99980014	0,99980003	0,03999867

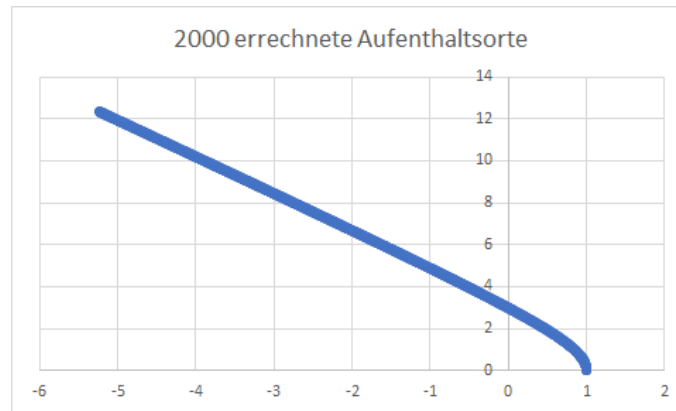
Stellt man die errechneten Aufenthaltsorte dar (bitte beachten Sie die unterschiedliche Skalierung der Achsen im folgenden Bild!), dann erkennt man, dass der Körper sich zunehmend "nach links"bewegt:



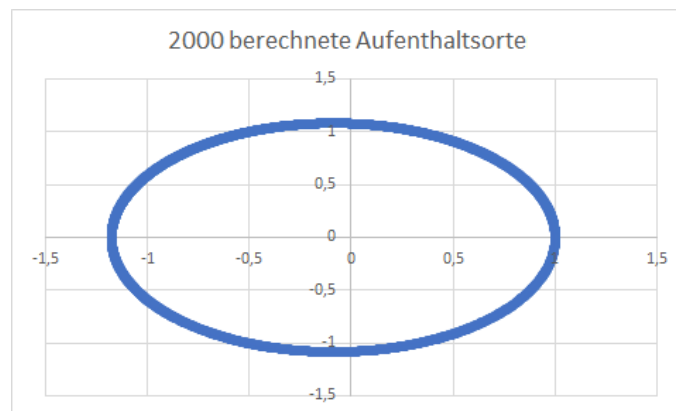
Die Möglichkeit, dies mit dem Rechner zu verfolgen, erlaubt es natürlich, dies für sehr viele „Zeilen“ zu tun; zu bedenken ist immer, dass jeder Wert nur eine Näherung ist, dass der zweite Wert schon eine Näherung ist, die sich selbst auf eine Näherung stützt usw., sodass sich Abweichungen durchaus aufschaukeln können und schließlich das Bild mit der Realität nicht mehr viel zu tun hat. Zu den so im Verfahren begründeten Unsicherheiten kommt noch

der Umstand hinzu, dass der Rechner alle Werte rundet und wir nicht verfolgen können, wie sich die fortgesetzten Rundungsfehler auswirken.

Dennoch zeigt das folgende Bild das Resultat, das entsteht, wenn man die gezeigte Rechnung für 2000 Zeitintervalle durchführt:



Offenbar wird der bewegte Körper zwar abgelenkt, setzt seinen Flug ins All jedoch fort. Was würde geschehen, wenn die Anfangsgeschwindigkeit etwas geringer wäre? Wenn wir statt $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit dem Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,6 \end{pmatrix}$ starteten, zeigte der Rechner ein ganz anderes Bild:



Nun bewegt sich der Körper offenbar in einer eiförmigen Bahn um das Kraftzentrum herum. Das Kraftzentrum (0 | 0) befindet sich nicht im Mittelpunkt dieser Bahn.

Die Simulation mithilfe des Euler-Verfahrens liefert eine Möglichkeit, die in einem Experiment in der Realität nicht umzusetzen wäre. Man könnte fragen, wie die Bahn aussähe, wenn Newtons Gravitationsgesetz geringfügig falsch wäre, wenn also z.B. nicht

$$F_{12} = \gamma \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

sondern etwa

$$F_{12} = \gamma \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^3}$$

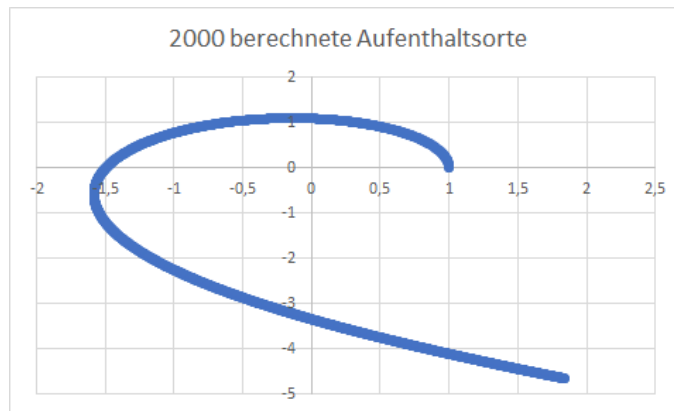
die Gravitationskraft beschriebe. An der vorgeführten Rechnung würde sich lediglich die Berechnung der Kräfte ändern; nun würde $\vec{F} = \frac{1}{r^4} \cdot \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix}$ mit

$$F_x = \frac{-x}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$F_y = \frac{-y}{(x^2 + y^2)^2}$$

die passende Beschreibung liefern.

Passt man die Berechnung der Tabellenkalkulation an, so ergibt sich das folgende Bild:



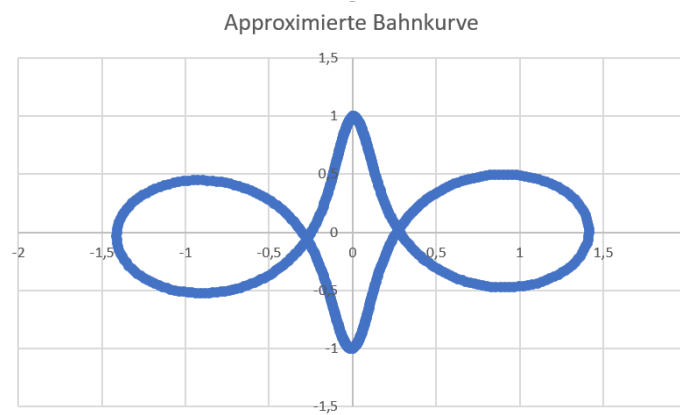
und man würde beobachten, dass die in großer Entfernung zum Kraftzentrum nun schwächere Gravitationskraft den Körper nicht auf einer stabilen Bahn hält, sondern dass er vielmehr nach einer dreiviertel Umrundung, bei der er näher an das Kraftzentrum herangezogen wird als im vorangegangenen Bild, ins All verschwinden würde.

Übung 3.2. Um diese Übung bearbeiten zu können, sollten Sie mit einem Tabellenkalkulationsprogramm wie z.B. EXCEL vertraut sein.

Stellen Sie sich vor, dass ein Körper der Masse 1 sich im Gravitationsfeld zweier unbeweglich gedachter Sonnen befindet, die – wieder alle numerischen Komplikationen vermeidend – sich in einem Koordinatensystem an den Punkten $S_1 (1 | 0)$ und $S_1 (-1 | 0)$ befinden; auf jede der Sonnen hin wird der Körper mit einer Kraft der Größe $\frac{1}{r^2}$ (r steht für den jeweiligen Abstand zur jeweiligen Sonne) gezogen. Anfangs befindet sich der Körper im Punkt $P (0 | 1)$ und seine Anfangsgeschwindigkeit ist $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- Erstellen Sie eine Tabellenkalkulation, in der mithilfe des Eulerverfahrens in Abständen von $\Delta t = 0,018$ die Positionen des Planeten näherungsweise ermittelt werden; stellen Sie die Bahn dann graphisch dar! Ein hübsches Bild entsteht, wenn Sie 603 Eulerschritte vornehmen.

Lösung 3.2.



Zur rechnerischen Kontrolle hier die ersten Zeilen der Tabelle. Mit F_1 sind die Kraftkomponenten in Richtung auf den ersten Planeten in S_1 bezeichnet:

$$F_{1x} = \frac{-(x-1)}{((x-1)^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$F_{1y} = \frac{-y}{((x-1)^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Analog wird F_2 berechnet. Die wirksame Kraft \vec{F} hat hier die Komponenten $\begin{pmatrix} F_{1x} + F_{2x} \\ F_{1y} + F_{2y} \end{pmatrix}$. Den Zwischenschritt der Berechnung der Beschleunigung enthält diese Tabelle nicht, da wegen $m = 1$ die Komponenten des Beschleunigungsvektors hier zahlenmäßig mit denen des Kraftvektors übereinstimmt.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	t	x(t)	y(t)	vx(t)	vy(t)	F1x(t)	F1y(t)	F2x(t)	F2y(t)	Fx(t)	Fy(t)
2	0	0	1	0,1	0	0,35355339	-0,3535534	-0,3535534	-0,3535534	0	-0,7071068
3	0,018	0,0018	0,9997709	0,1	-0,0127279	0,35399301	-0,3545501	-0,353356	-0,3526403	0,00063705	-0,7071903
4	0,036	0,00360021	0,99931267	0,10001147	-0,0254573	0,35455477	-0,3555913	-0,353278	-0,3517687	0,00127678	-0,70736
5	0,054	0,00540083	0,99862525	0,10003445	-0,0381898	0,35523997	-0,356678	-0,3533187	-0,3509377	0,00192123	-0,7076156
6	0,072	0,00720207	0,99770856	0,10006903	-0,0509269	0,35605009	-0,3578112	-0,3534776	-0,3501459	0,00257245	-0,7079571
7	0,09	0,00900415	0,9965625	0,10011534	-0,0636701	0,35698672	-0,358992	-0,3537542	-0,3493922	0,00323254	-0,7083842
8	0,108	0,01080727	0,99518692	0,10017352	-0,0764211	0,35805164	-0,3602213	-0,354148	-0,3486753	0,00390361	-0,7088966
9	0,126	0,01261166	0,99358166	0,10024379	-0,0891812	0,35924681	-0,3615002	-0,354659	-0,3479939	0,00458783	-0,709494

Kapitel 4

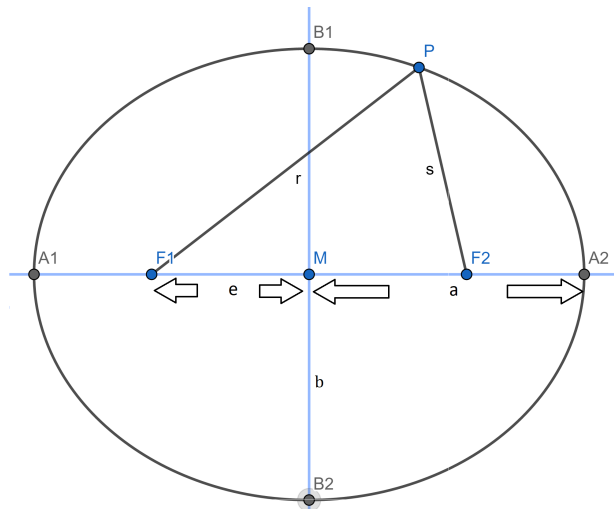
Kegelschnitte

4.1 Ellipsen

Es ist heutzutage allgemein bekannt, dass sich die Planeten im Sonnensystem nicht auf kreisförmigen, sondern auf ellipsenförmigen Bahnen um die Sonne bewegen. Um die Gründe dafür zu verstehen, schauen wir uns die Charakteristika von Ellipsen an und beginnen mit der

Definition 4.1. Gegeben sind zwei verschiedene Punkte F_1 und F_2 sowie eine Zahl $C > 0$. Der geometrische Ort aller jener Punkte P , für die die Summe der Entfernungen $|\overline{PF_1}| + |\overline{PF_2}|$ den gegebenen Wert C hat, heißt eine *Ellipse* mit den *Brennpunkten* F_1 und F_2 .

Die Definition kann man mithilfe der sogenannten Gärtnerkonstruktion einer Ellipse veranschaulichen: die „Schnur“ F_1PF_2 , die die beiden in F_1 und F_2 eingeschlagenen „Pflöcke“ verbindet, hat die gegebene Länge $C = r + s$ und wird durch den „Spaten“ im Punkt P straff gehalten. Es ist klar, dass Ellipsen punktsymmetrisch zum Mittelpunkt M der Strecke zwischen den Brennpunkten und achsensymmetrisch zu den Geraden $\overline{B_1B_2}$ und $\overline{A_1A_2}$ sind.



In der Zeichnung sind wesentliche Parameter der Ellipse eingetragen: der Abstand der Brennpunkte beträgt $2 \cdot e$, die *große Halbachse* a ist die Länge der Strecke vom Mittelpunkt M der beiden Brennpunkte bis zu einem der beiden (natürlich symmetrisch liegenden) Schnittpunkte A_1 oder A_2 der Ellipse mit der Geraden durch die Brennpunkte, und die *kleine Halbachse* b ist die Entfernung zwischen den Punkten M und B_1 oder - wieder aus Symmetriegründen - M und B_2 . Die Größe e , also die halbe Entfernung zwischen den Brennpunkten, heißt auch *lineare Exzentrizität* der Ellipse. Die genannten Größen sind natürlich voneinander abhängig:

Wenn P etwa identisch mit A_1 ist, dann ergibt sich aus der Definition der Ellipse, dass

$$\begin{aligned}(a + e) + (a - e) &= C \\ 2a &= C\end{aligned}$$

Liegt der Punkt P im Punkt B_1 , so sieht man nach dem Satz des Pythagoras:

$$\begin{aligned}2\sqrt{e^2 + b^2} &= C \\ \sqrt{e^2 + b^2} &= a \\ e^2 &= a^2 - b^2 \\ e &= \sqrt{a^2 - b^2}\end{aligned}$$

Der Wert $\varepsilon = \frac{e}{a}$ heißt *numerische Exzentrizität* der Ellipse. Definitionsgemäß ist $0 \leq \varepsilon < 1$. Wenn $\varepsilon = 0$ ist, also $e = 0$, dann ist die Ellipse identisch mit einem Kreis mit dem Radius $\frac{C}{2}$. Wenn ε sich dem Wert 1 nähert, so wird die Ellipse immer langgestreckter. Wir halten außerdem fest, dass die Achse, auf der die Brennpunkte liegen (also die große Halbachse) stets länger sein muss als die kleine Halbachse.

Übung 4.1. Die elliptische Umlaufbahn der Erde um die Sonne besitzt eine große Halbachse von $1,495980 \cdot 10^{11}$ m bei einer numerischen Exzentrizität von $\varepsilon = 0,016708$. Berechnen Sie den Abstand der beiden Brennpunkte sowie die kleine Halbachse! Berechnen Sie auch die Differenz der beiden Halbachsen in einem stark verkleinerten Modell der Erdumlaufbahn mit derselben numerischen Exzentrizität, das man so gebaut hätte, dass die große Halbachse die Länge 1 m besäße!

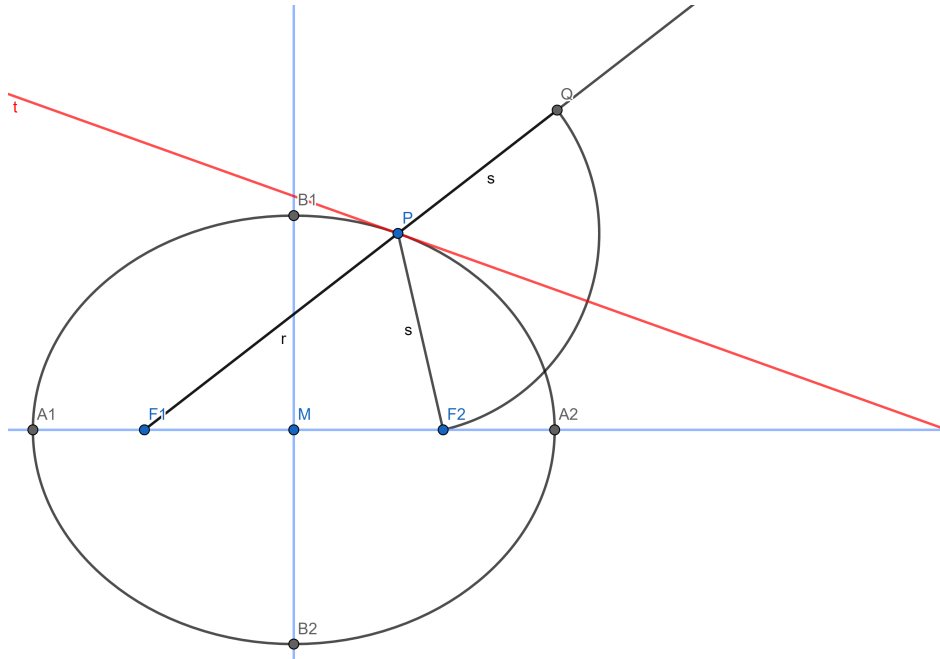
Lösung 4.1.

$$\begin{aligned}e &= a \cdot \varepsilon = 2,499483 \cdot 10^9 \text{ m}, \\ b &= \sqrt{a^2 - e^2} = 1,495771 \cdot 10^{11} \text{ m}.\end{aligned}$$

Die Entfernung der beiden Brennpunkte beträgt $2e = 4,998967 \cdot 10^9$ m. Wenn man so skaliert, dass $a = 1$ m wäre, so ergäbe sich $b = 0,999827$ m, sodass die Abweichung von einer Kreisbahn (von ca. 0,2 mm) kaum mit bloßem Auge feststellbar wäre. Man begeht also keinen allzu großen Fehler, wenn man sich die Erdumlaufbahn vereinfachend als Kreisbahn vorstellt.

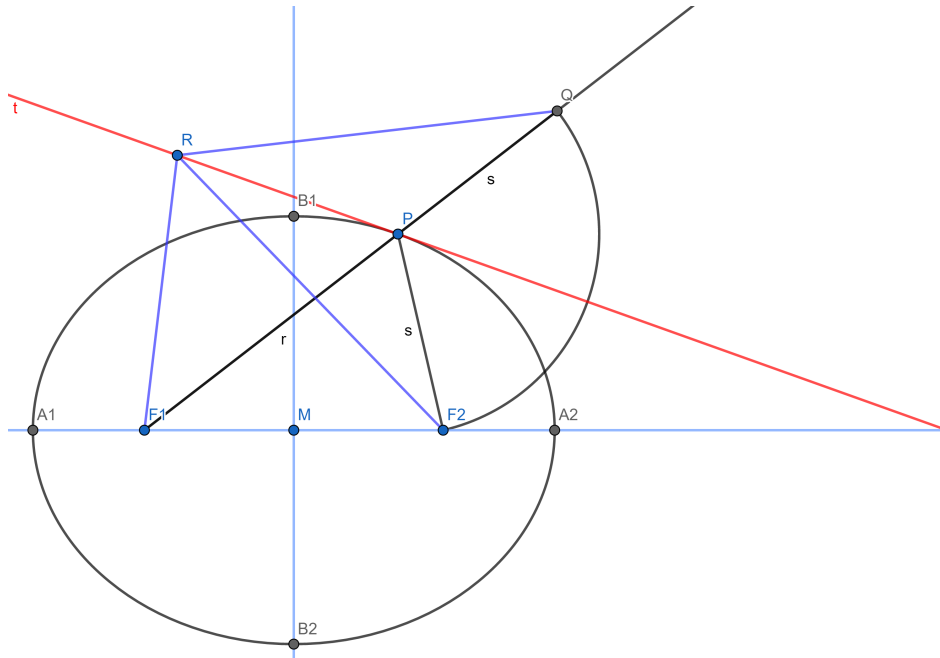
4.1.1 Tangenten an Ellipsen

Es sei P ein Punkt auf der Ellipse mit den Brennpunkten F_1 und F_2 . Im Folgenden werden wir die Strahlen von F_1 durch P und von F_2 durch P auch als *Fahrstrahlen* des Punktes P bezeichnen. Wir verlängern die Strecke $r = \overline{F_1P}$ über P hinaus um die Länge der Strecke $\overline{F_2P}$ und erhalten den Punkt Q . Die Winkelhalbierende des Winkels $\angle(F_2PQ)$ soll t heißen.



Es kann nun kein anderer Punkt außer P , der auf t liegt, auf der Ellipse liegen. Wenn R ein von P verschiedener Punkt auf t ist, so ist die Summe der Entfernung von R zu den Brennpunkten größer als $C = r + s$, denn nach Dreiecksungleichung gilt

$$|\overline{F_1R}| + |\overline{RF_2}| = |\overline{F_1R}| + |\overline{RQ}| > |\overline{F_1P}| + |\overline{PQ}| = r + s$$



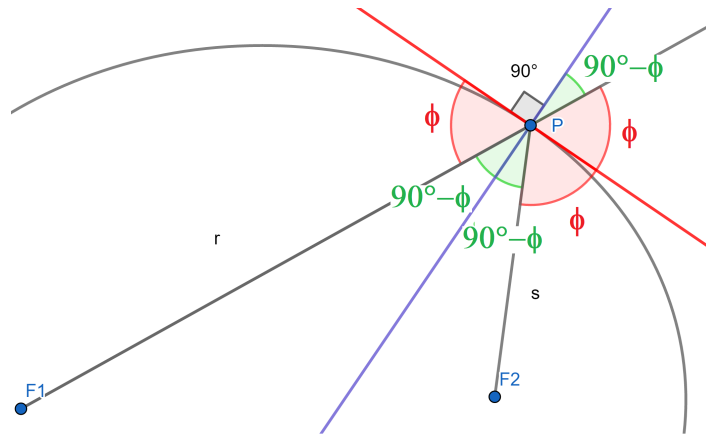
t kann als Gerade, die nur einen Punkt mit der Ellipse gemeinsam hat, also als Tangente an die Ellipse im Punkt P bezeichnet werden. Man kann zeigen, dass t die einzige Gerade durch den Punkt P mit dieser Eigenschaft ist:

Satz 4.1. Die Tangente an einen beliebigen Punkt einer Ellipse ist die Winkelhalbierende des äußeren Winkels zwischen den Fahrstrahlen zu diesem Punkt.

Übung 4.2. Unter der Normalen durch einen Punkt P auf einer Ellipse verstehen wir die Geraden durch P , die senkrecht auf der Tangente steht.

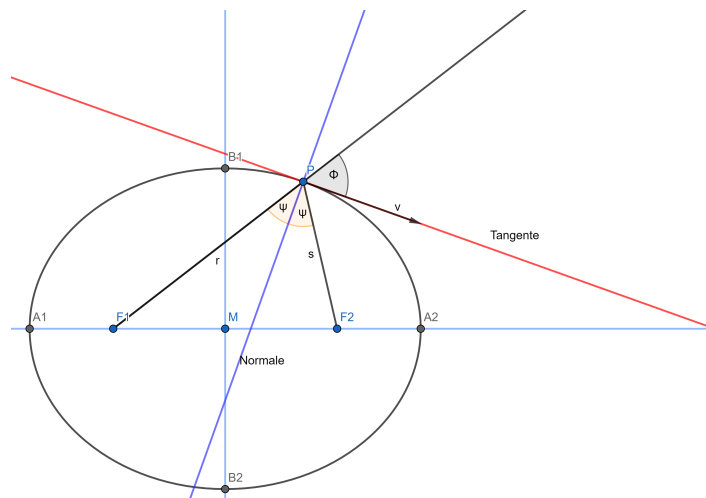
- (a) Zeigen Sie, dass die Normale den Innenwinkel $\angle(F_1PF_2)$ halbiert.
- (b) Denken Sie sich nun die Ellipse aus einem innen verspiegelten Material gefertigt. Begründen Sie, dass jeder Lichtstrahl, der von einer im Punkt F_1 befindlichen punktförmigen Lichtquelle ausgeht, so reflektiert wird, dass der entstehende Strahl durch den anderen Brennpunkt verläuft.

Lösung 4.2. Die erste Behauptung folgt sofort aus dem „Winkelspaziergang“ in der folgenden Zeichnung:



Die zweite Behauptung ist nun eine Anwendung des bekannten Reflexionsgesetzes („Einfallswinkel = Ausfallswinkel“).

Wir wenden unsere Erkenntnisse nun an, um Aussagen über die Richtung des Geschwindigkeitsvektors für einen Körper zu machen, der sich auf einer Ellipse (bei der Veranschaulichung entgegen dem Uhrzeigersinn) bewegt. Der Geschwindigkeitsvektor weist ja in Richtung der Tangente (vgl. 2.2). Den Winkel zwischen dem Fahrstrahl $\overline{F_1P}$ und dem Geschwindigkeitsvektor \vec{v} bezeichnen wir als *Richtungswinkel* und benennen ihn mit ϕ . In das folgende Bild ist auch die Normale eingetragen; aus der vorangegangenen Übung wissen Sie, dass sie den Innenwinkel zwischen den Fahrstrahlen halbiert.



Da $2a = r + s$ ist, gilt

$$4a^2 = r^2 + s^2 + 2rs$$

und wegen des Cosinussatzes im Dreieck F_1PF_2 gilt andererseits

$$4e^2 = r^2 + s^2 - 2rs \cdot \cos(2\psi).$$

Subtrahiert man beide Gleichungen, so ergibt sich

$$4(a^2 - e^2) = 2rs(1 + \cos(2\psi)).$$

Einerseits gilt nun $b^2 = a^2 - e^2$. Andererseits können wir das Additionstheorem für den Cosinus , also

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) - \sin(\alpha) \sin(\beta)$$

für $\alpha = \beta = \psi$ anwenden. So erhalten wir mit Hilfe des sog. „trigonometrischen Satzes von Pythagoras“, also der Identität $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$, aus der letzten Gleichung:

$$4b^2 = 2rs \cdot (1 + \cos^2(\psi) - \sin^2(\psi)) = 2rs \cdot [1 + \cos^2(\psi) - (1 - \cos^2(\psi))] = 4rs \cdot \cos^2(\psi)$$

oder, kürzer:

$$b^2 = rs \cdot \cos^2(\psi).$$

Da die Normale nun einmal senkrecht auf der Tangente steht, ist $\psi + \phi = 90^\circ$, sodass $\cos(\psi) = \sin(\phi)$ ist. Damit ergibt sich schließlich

$$b^2 = rs \cdot \sin^2(\phi).$$

Wenn wir $s = 2a - r$ nutzen, erhalten wir eine Gleichung mit weniger "Variablen":

$$b^2 = (2ar - r^2) \cdot \sin^2(\phi)$$

oder (solange die Division keine Probleme macht)

$$2a \cdot r - r^2 = \frac{b^2}{\sin^2(\phi)}.$$

Satz 4.2. *Bewegt sich ein Punkt P auf einer Ellipse, so besteht zwischen der Länge r des Vektors zwischen einem Brennpunkt und P und dem Richtungswinkel ϕ zwischen diesem Vektor und dem Geschwindigkeitsvektor der Zusammenhang*

$$2a \cdot r - r^2 = \frac{b^2}{\sin^2(\phi)}.$$

Übung 4.3. Berechnen Sie aus den Angaben von Übung 4.1 , in welchem Richtungswinkel die Erde von der Tangentialrichtung „abbiegt“, wenn sie gerade 149.585.000 km von der Sonne entfernt ist.

Lösung 4.3. Aus $2a \cdot r - r^2 = \frac{b^2}{\sin^2(\phi)}$ ergibt sich durch Einsetzen der bekannten Werte von a und b sowie des gegebenen Wertes für r die Gleichung

$$\sin^2 \phi = \frac{b^2}{2a \cdot r - r^2} \approx 0,99972 ,$$

woraus sich der Winkel $\phi \approx 89,04125^\circ \approx 89^\circ 2' 28''$ ergibt.

Übung 4.4. Stellen Sie sich vor, wir hätten von einem Körper nachgewiesen, dass er sich so bewegt, dass sein Verbindungsvektor \vec{FP} zwischen einem festen Punkt F in jeder Position P des Körpers mit dem Richtungswinkel ϕ (zwischen dem Ortsvektor und dem Geschwindigkeitsvektor \vec{v}) stets in folgendem Zusammenhang steht:

$$5r - 3r^2 = \frac{2}{\sin^2(\phi)}.$$

Zeigen Sie, dass der Körper sich auf einer Ellipse bewegt – und geben Sie deren Halbachsen und die Exzentrizitäten an!

Verallgemeinern Sie Ihre Erkenntnisse auf den Fall, dass irgendein Zusammenhang der Form

$$A \cdot r + B \cdot r^2 = \frac{C}{\sin^2(\phi)}$$

mit $A, C > 0$ und $B < 0$ festgestellt wurde; begründen Sie, warum $A \geq 2\sqrt{|B| \cdot C}$ gelten sollte, damit Ihre Verallgemeinerung gelingt. Zeigen Sie weiter, dass im Falle $A < 2\sqrt{|B| \cdot C}$ die Gleichung unerfüllbar ist!

Lösung 4.4. Zunächst ist

$$5r - 3r^2 = \frac{2}{\sin^2(\phi)} \Leftrightarrow \frac{5}{3} \cdot r - r^2 = \frac{\frac{2}{3}}{\sin^2(\phi)},$$

sodass sich diese Gleichung für eine Ellipse mit der großen Halbachse $a = \frac{5}{6}$ und der kleinen Halbachse $b = \sqrt{\frac{2}{3}}$ ergeben würde. Tatsächlich ist übrigens $\frac{5}{6} \geq \sqrt{\frac{2}{3}}$. Aus den Halbachsen ergäbe sich eine lineare Exzentrizität von $e = \frac{1}{6}$ und damit eine numerische Exzentrizität von $\varepsilon = \frac{1}{5}$.

Im allgemeineren Fall würde die gleiche Umformung mit $B = -|B|$ nach der Division durch $|B|$ zu der Gleichung

$$\frac{A}{|B|}r - r^2 = \frac{\frac{C}{|B|}}{\sin^2 \phi}$$

führen; diese Gleichung entspräche der Ellipsengleichung, wenn die nun ablesbare große Halbachse $a = \frac{A}{2 \cdot |B|}$ sich wirklich als mindestens so groß wie der Wert der ablesbaren kleineren Halbachse $b = \sqrt{\frac{C}{|B|}}$ erweist:

$$\frac{A}{2 \cdot |B|} \geq \sqrt{\frac{C}{|B|}} \Leftrightarrow A \geq 2\sqrt{|B| \cdot C} \Leftrightarrow A^2 \geq 4|B| \cdot C$$

Um den letzten Punkt einzusehen, stellen wir die Gleichung um zu

$$\sin^2(\phi) = \frac{C}{Ar - |B|r^2}$$

Da $\sin^2(\phi)$ nur Werte in $[0;1]$ annehmen kann, darf $Ar - |B|r^2$ nicht kleiner als C werden. Nun ist

$$Ar - |B|r^2 = -|B| \left(r - \frac{A}{2|B|} \right)^2 + \frac{A^2}{4|B|}$$

Der maximale Wert des Terms beträgt also $\frac{A^2}{4|B|}$, und der darf nicht kleiner als C sein; also $A^2 \geq 4|B| \cdot C$.

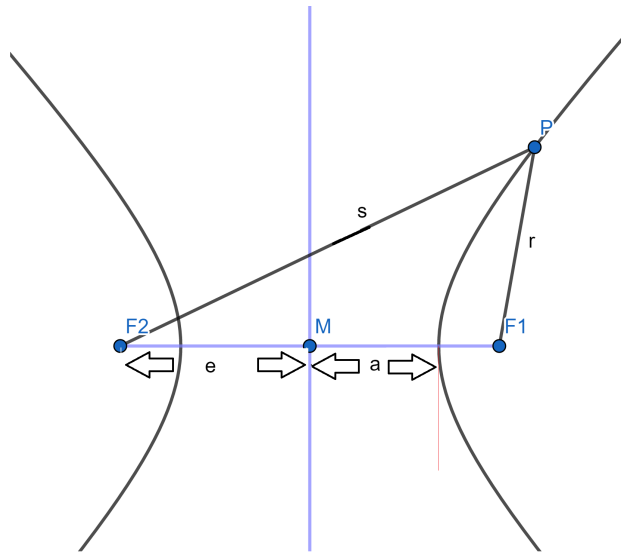
4.2 Hyperbeln

In einer der Definition 4.1 ganz ähnlichen Weise kann man andere Kurven definieren:

Definition 4.2. Gegeben sind zwei verschiedene Punkte F_1 und F_2 sowie eine Zahl $C > 0$. Der geometrische Ort aller jener Punkte P , für die der Betrag der Differenz der Entfernungen $||\overline{PF_1}| - |\overline{PF_2}||$ den gegebenen Wert C hat, heißt eine *Hyperbel* mit den *Brennpunkten* F_1 und F_2 .

Eine solche Hyperbel besteht aus zwei Ästen: im einen Ast erfüllen alle Punkte P die Gleichung $|\overline{PF_1}| - |\overline{PF_2}| = C$, im anderen Ast eben die Gleichung $|\overline{PF_2}| - |\overline{PF_1}| = C$.

Die folgende Zeichnung zeigt eine Hyperbel, wobei der eingezeichnete Punkt P auf dem oben als zweiten Ast geschilderten Teil der Hyperbel liegt. Analog zum Vorgehen bei Ellipsen sind einige Parameter der Hyperbel eingezeichnet. Die Punktsymmetrie der Hyperbel zum Mittelpunkt zwischen den Brennpunkten ist wieder sofort einsichtig; im Gegensatz zur Ellipse ist die Hyperbel jedoch unbeschränkt, d.h. sie lässt sich nicht ganz in einem hinreichend großen Kreis „einsperren“.



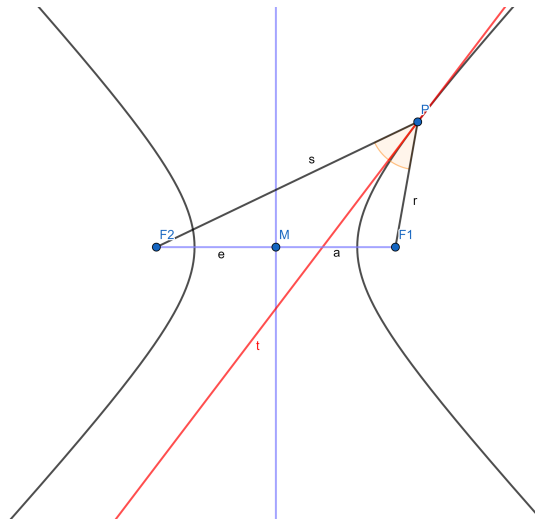
Die Strecke a heißt *große Halbachse der Hyperbel*, die Länge von e heißt *lineare Exzentrizität* der Hyperbel, und $\varepsilon = \frac{e}{a}$ ihre *numerische Exzentrizität*. Diesmal ist klar, dass $\varepsilon > 1$ ist. Man definiert eine Größe $b = \sqrt{e^2 - a^2}$ zunächst ohne geometrischen Interpretation, und bezeichnet

diese als *kleine Halbachse* der Hyperbel. Die Bezeichnung ist etwas irreführend: die „kleine“ Halbachse muss nicht unbedingt kleiner als die „große“ Halbachse sein.

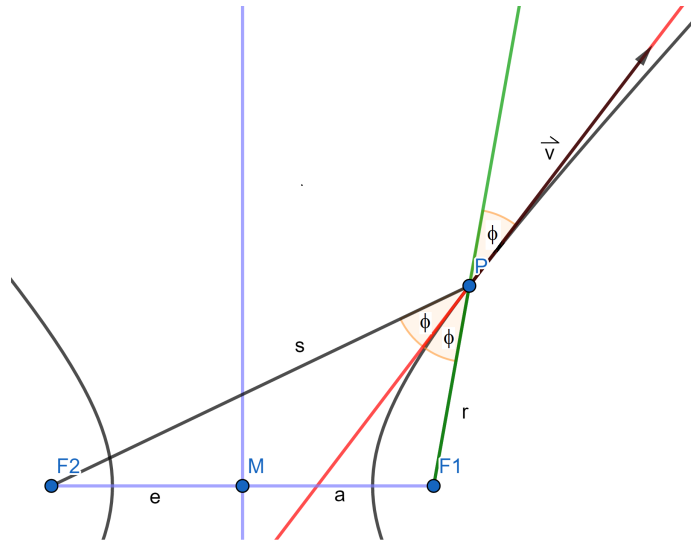
Übung 4.5. Die Überlegungen orientieren sich eng an denen, die für Ellipsen durchgeführt wurden.

- Zeigen Sie – mit den eben eingeführten Bezeichnungen –, dass für jeden Punkt auf der Hyperbel gilt: $|r - s| = 2a$.
- Zeigen Sie, dass die Winkelhalbierende zwischen r und s eine Gerade durch P ist, die mit der Hyperbel nur den Punkt P gemeinsam hat. Diese Gerade heißt dann Tangente an die Hyperbel im Punkt P . (vgl. folgende Zeichnung)
- Stellen Sie sich vor, dass der rechte Ast der Hyperbel aus einem verspiegelten Material ist und dass im Punkt F_1 eine punktförmige Lichtquelle positioniert ist, von der Lichtstrahlen auf die Hyperbel fallen. Zeigen Sie, dass alle diese Strahlen so reflektiert werden, dass die reflektierten Strahlen alle vom Punkt F_2 auszugehen scheinen.

Lösung 4.5. Das ist wirklich analog!



Wenn wir nun wieder einen Zusammenhang zwischen dem Richtungswinkel (zwischen dem tangentialen Geschwindigkeitsvektor \vec{v} und dem Fahrstrahl $\overrightarrow{F_1P}$) und der Länge des Fahrstrahls (also r) machen wollen, dann gelingt das ebenfalls mit einer zur Situation bei Ellipsen völlig analogen Vorgehensweise; die folgende Zeichnung unterstützt die argumentative Übertragung:



Da $2a = s - r$ ist, gilt

$$4a^2 = r^2 + s^2 - 2rs,$$

und wegen des Cosinussatzes im Dreieck F_1PF_2 gilt andererseits

$$4e^2 = r^2 + s^2 - 2rs \cdot \cos(2\phi).$$

Subtrahiert man beide Gleichungen, so ergibt sich

$$4(a^2 - e^2) = -2rs(1 - \cos(2\phi)).$$

Einerseits gilt nun $b^2 = e^2 - a^2$. Damit und mit Hilfe des Additionstheorems erhalten wir

$$-4b^2 = -2rs \cdot (1 - \cos^2(\phi) + \sin^2(\phi)) = -2rs \cdot [1 - (1 - \sin^2(\phi)) + \sin^2(\phi)] = -4rs \cdot \sin^2(\phi)$$

oder, kürzer:

$$b^2 = rs \cdot \sin^2(\phi).$$

Mit $s = r + 2a$ folgt:

$$b^2 = (r^2 + 2ar) \cdot \sin^2(\phi).$$

Wenn die Division keine Probleme macht, kann man die Formel umstellen und erhält

$$2a \cdot r + r^2 = \frac{b^2}{\sin^2(\phi)}.$$

Übung 4.6. Stellen Sie sich vor, wir hätten von einem Körper nachgewiesen, dass er sich so bewegt, dass sein Verbindungsvektor \vec{FP} zwischen einem festen Punkt F in jeder Position P des Körpers mit dem Richtungswinkel ϕ (zwischen dem Ortsvektor und dem Geschwindigkeitsvektor \vec{v}) stets in folgendem Zusammenhang steht:

$$5r + 3r^2 = \frac{2}{\sin^2(\phi)}.$$

Zeigen Sie, dass der Körper sich auf einer Hyperbel bewegt - und geben Sie deren Halbachsen und die Exzentrizitäten an!

Verallgemeinern Sie Ihre Erkenntnisse auf den Fall, dass irgendein Zusammenhang der Form

$$A \cdot r + B \cdot r^2 = \frac{C}{\sin^2(\phi)}$$

mit $A, C > 0$ und $B > 0$ festgestellt wurde!

Lösung 4.6. Das ist völlig analog zu 4.4: $\frac{5}{3}r + r^2 = \frac{\frac{2}{3}}{\sin^2(\phi)}$ führt zu $a = \frac{5}{6}, b = \sqrt{\frac{2}{3}}, e = \sqrt{\frac{29}{36}}, \varepsilon = \frac{\sqrt{29}}{5}$.

Bitte vergleichen Sie Ihr Ergebnis unbedingt mit dem aus der Übung 4.4!

4.3 Parabeln

Beim Vergleich der Ergebnisse der Übungen 4.4 und 4.6 fällt die strukturelle Ähnlichkeit sofort auf; offenbar „fehlt“ der Fall, in dem in diesem Zusammenhang

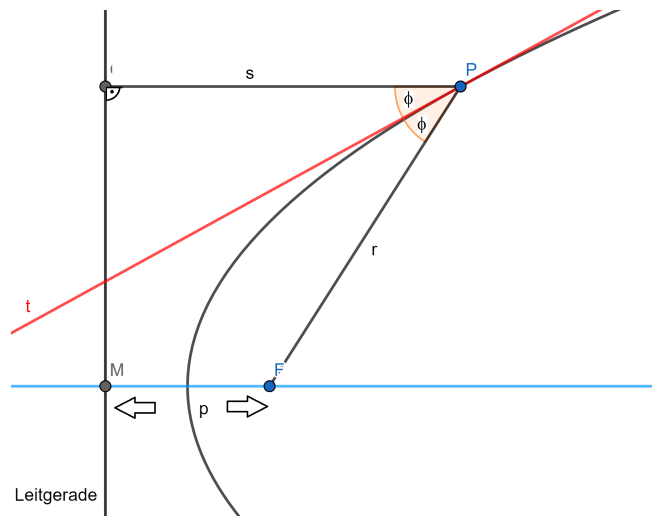
$$A \cdot r + B \cdot r^2 = \frac{C}{\sin^2(\phi)}$$

mit $A, C > 0$ außer $B < 0$ (Ellipsen) und $B > 0$ (Hyperbeln) auch $B = 0$ auftritt.

Die folgenden Zusammenhänge können ganz analog zu dem Vorgehen in den beiden vorausgehenden Fällen untersucht werden; hier werden sie ohne Beweise mitgeteilt (und mögen eine Anregung für eine sinnvolle Beschäftigung an sonst langweiligen Wochenenden darstellen):

Definition 4.3. Gegeben sind eine Gerade l und ein Punkt F , der nicht auf der Geraden liegt. Der geometrische Ort aller jener Punkte P , die die gleiche Entfernung zu F wie zur Geraden l haben, heißt eine *Parabel* mit dem *Brennpunkt* F und der *Leitgeraden* l .

Als charakteristische Größe ist in der folgenden Zeichnung die Entfernung des Brennpunktes zur Leitgeraden eingezeichnet; p heißt einfach *Parameter der Parabel*.



Die folgenden Zusammenhänge werden hier ohne Beweis mitgeteilt:

- (a) Die Parabel ist symmetrisch, wobei die Symmetrieachse senkrecht auf der Leitgeraden steht und durch den Brennpunkt verläuft.
- (b) Die Winkelhalbierende zwischen den (gleichlangen) Strecken r und s ist die Tangente an die Parabel im Punkt P .
- (c) Alle Strahlen, die von einer im Brennpunkt F angebrachten punktförmigen Lichtquelle auf ein verspiegeltes Parabelmodell fallen, werden so reflektiert, dass die reflektierten Strahlen parallel zur Symmetrieachse verlaufen.
- (d) Der zwischen dem Fahrstrahl \overrightarrow{FP} und dem Geschwindigkeitsvektor \vec{v} entstehende Winkel ϕ hängt bei einem Körper, der sich entlang der Parabel bewegt, für $\sin(\phi) \neq 0$ mit der Länge r durch die Gleichung

$$p = 2r \cdot \sin^2(\phi) \quad \Leftrightarrow \quad 2r = \frac{p}{\sin^2(\phi)}$$

zusammen.

Übung 4.7. Stellen Sie sich vor, wir hätten von einem Körper nachgewiesen, dass er sich so bewegt, dass sein Verbindungsvektor \overrightarrow{FP} zwischen einem festen Punkt F in jeder Position P des Körpers mit dem Richtungswinkel ϕ (zwischen dem Ortsvektor und dem Geschwindigkeitsvektor \vec{v}) stets in folgendem Zusammenhang steht:

$$5r = \frac{4}{\sin^2(\phi)}.$$

Zeigen Sie, dass der Körper sich auf einer Parabel bewegt – und geben Sie deren Parameter an!

Verallgemeinern Sie Ihre Erkenntnisse auf den Fall, dass irgendein Zusammenhang der Form

$$A \cdot r + B \cdot r^2 = \frac{C}{\sin^2(\phi)}$$

mit $A, C > 0$ und $B = 0$ festgestellt wurde!

Vergleichen Sie wieder Ihr Ergebnis mit denen aus den Übungen 4.4 und 4.6.

Lösung 4.7. Offenbar $p = \frac{8}{5}$

Wir haben also den folgenden Zusammenhang gefunden:

Satz 4.3. Wenn wir von einem Körper nachgewiesen haben, dass zwischen dem Verbindungsvektor \overrightarrow{FP} zwischen einem festen Punkt F in jeder Position P des Körpers und dem Richtungswinkel ϕ (zwischen dem Ortsvektor und dem Geschwindigkeitsvektor \vec{v}) ein Zusammenhang der Form:

$$A \cdot r + B \cdot r^2 = \frac{C}{\sin^2(\phi)}$$

mit $A, C > 0$ besteht, so bewegt sich der Körper auf einem Kegelschnitt¹. Der Körper bewegt sich

¹Ein Oberbegriff über Ellipse, Parabel und Hyperbel lautet *Kegelschnitt*. Der historische und sachliche Hintergrund für diese Bezeichnung kann hier nicht dargestellt werden.

- auf einer Ellipse, falls $B < 0$ ist; F ist ein Brennpunkt der Ellipse.
- auf einer Parabel, falls $B = 0$ ist; F ist der Brennpunkt der Parabel.
- auf einer Hyperbel, falls $B > 0$ ist; F ist derjenige Brennpunkt der Hyperbel, der näher an P liegt.

Man hat nun eine Möglichkeit an der Hand, die Bahn eines sich bewegenden Körpers zu identifizieren, wenn man den Zusammenhang zwischen der Länge des Ortsvektors des sich bewegenden Punktes P (von einem festen Punkt F aus) und dem Richtungswinkel ϕ in der Form einer Gleichung

$$A \cdot r + B \cdot r^2 = \frac{C}{\sin^2(\phi)}$$

mit $A, C > 0$ beschreiben kann. Die konkreten Größen von A , B und C hängen natürlich von physikalischen Gegebenheiten ab. Diese werden im nächsten Kapitel für Körper, die sich im Weltall bewegen, untersucht.

Kapitel 5

Dynamik

5.1 Kreisbewegungen

Wenn ein Körper sich so auf einem Kreis „gleichförmig“ bewegt, dass sich also der Betrag seiner Geschwindigkeit nicht ändert, so wirkt dennoch eine Kraft auf ihn, denn die Richtung der Geschwindigkeit ändert sich ja, und nach Newtons erstem Axiom muss das durch eine Kraft verursacht werden. Diese Kraft heißt *Zentripetalkraft*.

Zur Beschreibung der Kreisbewegung sollte man offensichtlich die folgenden Größen verwenden:

- den Radius r und die Zeit T , die der Körper für einen vollen Umlauf benötigt
- den Betrag v der Geschwindigkeit, mit der der Körper auf seiner Bahn unterwegs ist; und da dieser Betrag sich nicht ändert, lässt sich v einfach ausrechnen durch

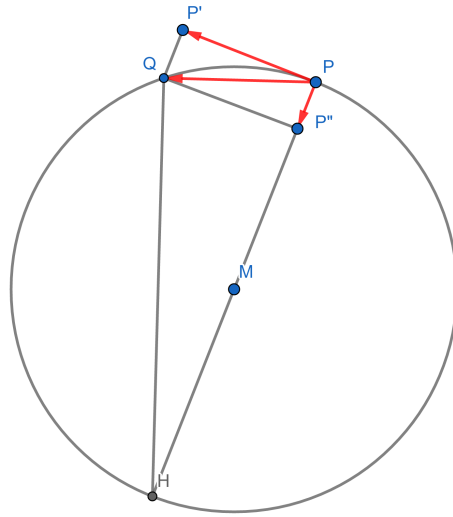
$$v = \frac{2\pi r}{T}.$$

Liegt der Fokus auf der Betrachtung der Winkel, die der Fahrstrahl vom Kreismittelpunkt zum Körperschwerpunkt in einer Zeitspanne überstreicht, so bietet es sich an, auch die sog. Winkelgeschwindigkeit zu betrachten:

$$\omega = \frac{2\pi}{T},$$

und da die Bewegung gleichförmig ist, ergibt sich sofort: während einer Zeitspanne Δt überstreicht der Fahrstrahl stets einen Winkel mit dem Bogenmaß $\varphi = \omega \cdot \Delta t$. Eine Angabe wie $\omega = 5\text{s}^{-1}$ sagt also aus, dass der Fahrstrahl pro Sekunde 5 mal den ganzen Kreis überstreicht.

Um nun die *Zentripetalbeschleunigung* auszurechnen, bedenkt man, dass der Körper eigentlich seine Bewegung gleichförmig geradeaus fortsetzen möchte (1. Axiom), durch die Zentripetalkraft aber in Richtung Kreismittelpunkt zum Abbiegen gezwungen wird:



Wenn in einem Zeitintervall Δt der Körper seine Bewegung ohne Wirkung der Zentripetalkraft fortsetzen würde, so gelänge er vom Punkt P aus zum Punkt P' , und $\overrightarrow{PP'} = \vec{v} \cdot \Delta t$. Wenn er aber nur der Zentripetalkraft folgen würde, so würde er nach dem Gesetz von der gleichmäßig beschleunigten Bewegung um einen Vektor $\overrightarrow{PP''} = \frac{1}{2} (\Delta t)^2 \cdot \vec{a}$ auf den Drehmittelpunkt M hin bewegt. Die tatsächliche Bewegung von P nach Q ist eine Überlagerung der beiden Bewegungen.

Im Dreieck PQH liegt nach dem Satz des Thales bei Q ein rechter Winkel, und nach dem Höhensatz des Euklid findet man:

$$\overline{P''Q}^2 = \overline{P''P} \cdot \overline{P''H} .$$

Einsetzen der oben berechneten Beträge liefert:

$$(v\Delta t)^2 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot (\Delta t)^2 \cdot \left[2r - \frac{1}{2} \cdot a \cdot (\Delta t)^2 \right] ,$$

oder nach einer Division durch $(\Delta t)^2$ einfacher:

$$v^2 = a \cdot r - \frac{1}{4} \cdot a^2 \cdot (\Delta t)^2 .$$

Wir haben während der Berechnung so getan, also bliebe \vec{a} konstant; das gilt natürlich nur für sehr kleine Werte von Δt , und je kleiner das Zeitintervall ist, desto „zulässiger“ wird unsere Rechnung. Unser Resultat ist erst ganz richtig, wenn wir den Grenzfall $\Delta t \rightarrow 0$ betrachten, und dann erhalten wir:

$$v^2 = a \cdot r \Leftrightarrow a = \frac{v^2}{r} .$$

Wir haben die Zentripetalbeschleunigung berechnet.

Übung 5.1. Leiten Sie die folgende Formel her:

Die Zentripetalbeschleunigung berechnet sich zu $a = \omega^2 \cdot r$

Lösung 5.1. Trivial: $a = \frac{v^2}{r}$ wird mit $v = \omega r$ sofort zur gesuchten Formel.

Denken wir uns nun, ein Satellit umkreist einen Himmelskörper, wie etwa die ISS die Erde in einer Höhe von 400 km über der Erdoberfläche. Die Zentripetalkraft wird hier durch die Gravitationskraft der Erde auf die ISS ausgeübt; diese hat zur Zeit eine Masse von 450 t.

Übung 5.2. • Berechnen Sie die Bahngeschwindigkeit der ISS!

- Stellen Sie sich vor, dass ein Beobachter am Äquator zu einem Zeitpunkt die ISS genau über sich sähe und dass die Bahn der ISS genau in Ost-West-Richtung verlief. Würde die ISS sich im nächsten Moment aus der Sicht des Beobachters nach Westen oder nach Osten weiterbewegen - oder bliebe sie über dem Beobachter „am Himmel stehen“ ?

Lösung 5.2. Die Zentripetalkraft für die ISS wird durch die Gravitationskraft gestellt:

$$\gamma \frac{m_{\text{ISS}} \cdot m_{\text{Erde}}}{r_{\text{ISS}}^2} = m_{\text{ISS}} \frac{v^2}{r_{\text{ISS}}} \Leftrightarrow v = \sqrt{\gamma \frac{m_{\text{Erde}}}{r_{\text{ISS}}}} \approx 7674,31 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Damit ist die Umlaufzeit gegeben zu $T = \frac{2\pi r}{v} \approx 5544\text{s} \approx 1 \text{ h } 32 \text{ min } 24 \text{ s}$. In der geschilderten Situation ist die Umlaufzeit der ISS viel kleiner als die Umlaufzeit des am Äquator stehenden Beobachters. Die ISS „überholt“ den Beobachter, und da der sich von Westen nach Osten dreht, verschwindet die ISS im Osten.

Übung 5.3. In der Nachrichtentechnik verwendet man sogenannte geostationäre Satelliten. Diese Satelliten scheinen über einem festen Punkt der Erde stehen zu bleiben: ihre Umlaufzeit stimmt genau mit der Umdrehungszeit der Erde (23 h 56 min 4 s) überein. Berechnen Sie die Entfernung vom Erdmittelpunkt und die Bahngeschwindigkeit eines solchen Satelliten!

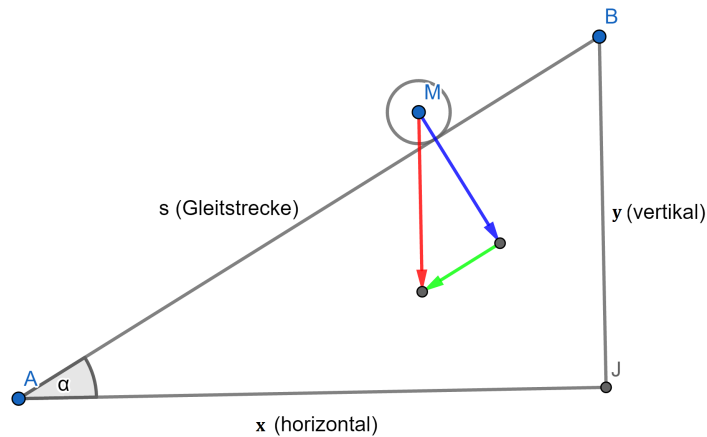
Lösung 5.3. Die Umlaufzeit des geostationären Satelliten beträgt - umgerechnet in Sekunden $T = 86164 \text{ s}$. Wieder muss die Zentripetalkraft von der Gravitation erbracht werden:

$$\gamma \frac{m_S m_{\text{Erde}}}{r_S^2} = m_S \frac{v^2}{r_S} \Leftrightarrow v^2 = \gamma \frac{m_{\text{Erde}}}{r_S} \Leftrightarrow \left(\frac{2\pi r_S}{T} \right)^2 = \gamma \frac{m_{\text{Erde}}}{r_S} \Leftrightarrow r_S = \sqrt[3]{\gamma \frac{m_{\text{Erde}} T^2}{4\pi^2}}$$

Damit errechnet man $r_S \approx 42.170 \cdot 10^3 \text{ m}$. Die zugehörige Geschwindigkeit ergibt sich zu $v = \frac{2\pi r}{T} \approx 3.075 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

5.2 Arbeit und Energie

Unter dem Fachbegriff *Arbeit* versteht man in der Physik etwas Anderes als in der Umgangssprache. Arbeit verrichtet man zum Beispiel immer dann, wenn man einen Körper durch die Einwirkung einer Kraft in eine bestimmte Richtung bewegt; dabei „zählt“ nur jener Anteil der Kraft, der wirklich in die Bewegungsrichtung weist, und es „zählt“ nicht unbedingt die Wegstrecke, die der Körper zurücklegt, sondern die Wegstrecke, über die hinweg die Kraft aufgewendet werden muss. Die wirksame Kraft wird mit der Länge des Weges der Anwendung multipliziert. Die übliche Maßeinheit für Arbeit ist also *Meter · Newton* und wird mit *J* (für *Joule*) abgekürzt. Das folgende Standardbildchen ist exemplarisch:



Ein Körper gleitet (reibungsfrei und ohne zu rollen) eine schiefe Ebene herab. Ursache davon ist die Gewichtskraft mit dem Maß $F = m \cdot g$ mit $g = 9,81 \frac{m}{s^2}$ (rot), aber nur eine Komponente dieser Kraft (die grüne) trägt zur Bewegung bei. Die andere Komponente (blau) sorgt dafür, dass der Körper auf die Rollfläche aufgedrückt wird. Damit wäre die Arbeit, die die Gravitationskraft hier verrichtet, gleich dem Produkt aus der Größe der grün gezeichneten Kraft und der Länge s der Gleitstrecke. Die Größe Arbeit wird gerne mit dem Buchstaben W bezeichnet (von engl. *work*).

Übung 5.4. (a) Zeigen Sie, dass diese Arbeit nicht vom Winkel α abhängt und dass stets gilt: $W = m \cdot g \cdot y$. Interpretieren Sie diesen Term für W !

(b) Welche Arbeit würde die Gravitationskraft verrichten, wenn die „schiefe“ Ebene horizontal verlief und der Körper friedlich auf ihr entlanggleiten würde?

Lösung 5.4. Da in der Zeichnung der Winkel bei M gleich dem bei A ist, gilt für die wirksame Kraft: $F_w = F \cdot \sin(\alpha)$, für die Weglänge AB aber $AB = \frac{y}{\sin(\alpha)}$. Daraus ergibt sich sofort die Behauptung.

Bei einer horizontalen Ebene, auf der der Körper gleitet, würde die Gravitation keine Arbeit verrichten, da dann der grüne Vektor den Betrag 0 hätte.

Umgekehrt muss jemand, der den Körper von Punkt A den Berg hinauf zu Punkt B schiebt, die gleiche Arbeit „gegen die als konstant angenommene Schwerkraft“ verrichten. In seiner Lage in Punkt B hat der Körper also bereits Arbeitsanwendung erfahren - und sobald man ihn loslässt, beginnt die Schwerkraft, an ihm Arbeit zu verrichten. Man verwendet den Begriff der Energie: in seiner Lage im Punkt B hat der Körper eine **Lageenergie** von $W = m \cdot g \cdot y$.

Die Sache wird etwa komplizierter, wenn man die Lageenergie eines Körpers berechnen will, der sich in einer Entfernung r von einem Zentralgestirn befindet. Wenn er sich bewegt, so ist nur jener Bewegungsanteil, der den Abstand vom Zentralgestirn betrifft, von Bedeutung. Wenn er sich nämlich ein Stückchen weit auf einer Kreisbahn um das Zentralgestirn bewegt (also „seitlich“ ausweicht), so steht die Gravitationskraft in jedem Moment während dieser

Bewegung senkrecht auf dem die Bewegungsrichtung anzeigenden Geschwindigkeitsvektor, sodass keine Kraftkomponente in der Bewegungsrichtung wirkt. Es geht also bei der Energieberechnung nur um Veränderungen der Entfernung vom Zentralgestirn.

Entgegen unseres vorigen Ansatzes können wir die Gravitationskraft nicht mehr als konstant voraussetzen, sondern müssen Newtons Gravitationsgesetz bedenken. Wenn wir also den Körper von einer Entfernung r_1 bis zu einer größeren Entfernung r_2 gegen die Gravitation bewegen wollen, müssen wir uns wie beim Eulerverfahren mit kleinsten Schrittschritten behelfen, auf denen die Gravitationskraft hilfsweise als jeweils konstant angenommen wird. Dieses Verfahren wird in der Mathematik in der Integralrechnung perfektioniert; das ist hier nicht zu leisten, aber der Grundgedanke ist nun entwickelt. Das Resultat sei hier ohne Beweis angegeben:

Um einen Körper der Masse m von der Entfernung r_1 vom Mittelpunkt eines Zentralgestirns mit der Masse M zur größeren Entfernung r_2 von diesem Mittelpunkt zu bewegen, bedarf es einer Arbeit von

$$W = \gamma Mm \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right).$$

Die Perspektive ändert sich noch einmal, wenn wir uns keinen Titanen vorstellen, der Planeten von der Sonne wegschiebt, sondern wenn wir uns das Sonnensystem als geschlossenes System (ohne äußere Einflussnahme) vorstellen. Dann verrichtet nicht der Titan die Arbeit, sondern die Gravitation übernimmt das. Für die Gravitation sind in der obigen Sicht aber Anfangspunkt und Endpunkt vertauscht: sie zieht den Körper von der Position r_2 auf die Position r_1 . Dass wir bei der Beobachtung den Anfangspunkt mit einer größeren Zahl r_2 bezeichnen als den Endpunkt, liegt nur an unseren Vorlieben. Für die Betrachtung des Sonnensystems müssen wir ihm also gerecht werden, indem wir von

$$W = \gamma Mm \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)$$

ausgehen. Negative Energien mögen anfangs erstaunen. Der Sachverhalt wird indes klarer, wenn wir uns anschauen, wann ein Körper die Lageenergie 0 haben soll. Das ist dann der Fall, wenn er ganz außerhalb jedes Einflusses der Gravitation ist, also - anschaulich - unendlich weit weg vom Zentralgestirn. Dann wäre $r_2 = \infty$ und $\frac{1}{r_2} = 0$. Damit hätte ein Körper der Masse m , der sich in der Entfernung r_1 vom Zentralgestirn befindet, die negative Energie

$$W = -\gamma Mm \frac{1}{r_1}.$$

Wie im Beispiel der schiefen Ebene haben wir den Nullpunkt der Energie dort gewählt, wo keine Kraftwirkung in Bewegungsrichtung mehr auftritt. Bei der schiefen Ebene war das eben der „Fußboden“ in Punkt A .

Auch, wenn man einen ruhenden Körper durch Kraftaufwand beschleunigt, leistet man Arbeit; der Körper besitzt dann *Bewegungsenergie*. Wir wissen, dass eine konstante Kraft einen in Ruhe befindlichen Körper so beschleunigt, dass (wenn man den Startpunkt auf einer Gerade mit dem Wert 0 versieht) er nach der Zeit t die Strecke von $s = \frac{1}{2} \frac{F}{m} t^2$ zurückgelegt hat und eine Geschwindigkeit von $v = \frac{F}{m} t$ erreicht hat. Damit ist die notwendige Arbeit, um

ihn auf diese Geschwindigkeit zu beschleunigen, wieder als Produkt von Kraft und Weg berechenbar:

$$W = \frac{1}{2} \frac{F}{m} t^2 \cdot F = \frac{1}{2} \frac{F}{m} \cdot \left(\frac{vm}{F} \right)^2 \cdot F = \frac{1}{2} mv^2.$$

Ein sich um einen Zentralplaneten frei bewegender Körper, der keinen weiteren Einflüssen außer der Gravitation unterliegt (also zum Beispiel keiner Reibung oder keiner Wirkung eines Raketentriebwerkes), besitzt also Lageenergie und Bewegungsenergie. Eine der Grunderkenntnisse der Physik ist, dass in einem solchen System die Energie des sich bewegenden Körpers stets erhalten bleibt: kommt der Körper also näher an das Zentralgestirn (das heißt: seine negative Lageenergie nimmt noch ab), dann muss seine Bewegungsenergie in entsprechendem Maße zunehmen.

Wenn ein Körper also vom Zentralgestirn aus gesehen in einer ursprünglichen Entfernung r_1 mit der Geschwindigkeit v_1 unterwegs ist und von dort aus auf seiner Bahn bis zu einer Entfernung r_2 mit $r_2 > r_1$ gelangt, so muss die Geschwindigkeit v_2 , die er am Ziel noch besitzt, der Gleichung

$$\frac{1}{2} mv_2^2 - \frac{1}{2} mv_1^2 = \gamma Mm \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)$$

genügen. Eine einfache Umformung ergibt

$$v_2^2 - v_1^2 = 2\gamma M \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right).$$

5.3 Fluchtgeschwindigkeit

Wenn ein Körper, der sich im Abstand r_1 vom Mittelpunkt eines Zentralgestirns befindet, durch einen von uns veranlassten Energieschub eine so große Geschwindigkeit erteilt bekommen soll, dass er dem Einfluss der Gravitation gänzlich entflieht, so muss diese zugeführte Bewegungsenergie gerade so groß sein, dass er seine gesamte ursprünglich negative Lageenergie kompensieren kann. Dann gilt also die Gleichung

$$\frac{1}{2} mv^2 = \gamma Mm \frac{1}{r_1}.$$

Beachten Sie, dass wir hier das positive Vorzeichen verwenden, weil diesmal wir selbst arbeiten und die Arbeit nicht dem Gravitationsfeld überlassen haben. In der ursprünglichen Gleichung

$$W = \gamma Mm \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

haben wir uns wieder vorgestellt, dass $r_2 = \infty$, also $\frac{1}{r_2} = 0$ ist. Die zu erteilende Geschwindigkeit ist also gegeben zu

$$v_{\text{Flucht}} = \sqrt{\frac{2\gamma M}{r_1}}$$

und heißt Fluchtgeschwindigkeit des Körpers. Wird einem Körper, der sich gerade in der Entfernung r_1 von einem Zentralgestirn befindet, die Fluchtgeschwindigkeit erteilt, so entfernt er sich immer weiter vom Zentralgestirn; dabei nimmt seine Geschwindigkeit ständig ab und erreicht „im Unendlichen“ schließlich den Wert 0.

Stellen wir uns die Sache nun umgekehrt vor: Ein Meteorit kommt „aus dem Unendlichen“ und schlägt auf die Erde ein. Im schlimmsten Fall ist es nun so, dass der Meteorit und die Erde sich im Moment des Einschlags frontal aufeinander zu bewegen. Wenn wir vereinfacht annehmen, dass die Erde sich auf einer Kreisbahn um die Sonne bewegt, so ist sie dort (vgl. 5.1) mit der Geschwindigkeit

$$v_{\text{Erde}} = \sqrt{\frac{\gamma M_{\text{Sonne}}}{r_{\text{Erdbahn}}}}$$

unterwegs. Wenn der Meteorit mit der im Sonnensystem (also im System der nur durch die Sonne verursachten Gravitationskräfte) maximal möglichen Geschwindigkeit einschlägt, so ist dies gerade die Fluchtgeschwindigkeit des Meteoriten von der Erdbahn aus:

$$v_{\text{Meteorit}} = \sqrt{\frac{2\gamma M_{\text{Sonne}}}{r_{\text{Erdbahn}}}}$$

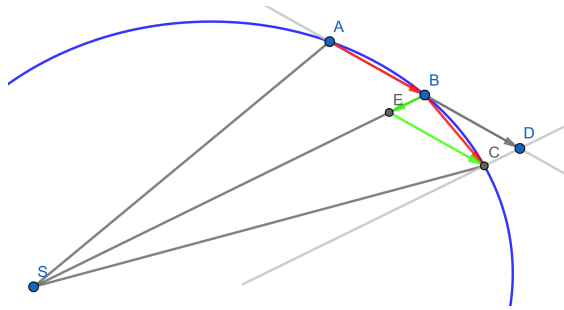
Beim Zusammenstoß addieren sich die Geschwindigkeiten und man erhält so näherungsweise die maximal mögliche Geschwindigkeit, mit der ein Meteorit auf der Erde einschlagen kann: tatsächlich haben wir die Anziehungskraft, die die Erde auf den Meteoriten ausübt, noch nicht berücksichtigt.

Übung 5.5. Alle Daten sind schon im Text erwähnt. Berechnen Sie die maximale Einschlaggeschwindigkeit! Tatsächlich würde der Meteorit vor dem Einschlag auf der Erdoberfläche durch die Erdatmosphäre abgebremst und dabei Bewegungsenergie verlieren - die in Wärmeenergie umgewandelt würde. Diesen (für Erdbewohner ebenfalls unerfreulichen) Aspekt haben wir hier ebenso wenig mit berechnet wie den Umstand, dass der Meteorit durch die Gravitation der Erde noch beschleunigt werden würde. Berechnen Sie die Bewegungsenergie, die frei wird, wenn nun ein Meteorit mit einer Masse von 5000 t mit maximaler Geschwindigkeit auf die Erde auftrifft.

Lösung 5.5. Die Geschwindigkeit der Erde ergibt sich zu $v_{\text{Erde}} = \sqrt{\frac{\gamma M_{\text{Sonne}}}{r_{\text{Erdbahn}}}} \approx 29900 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ und die des Meteoriten analog ca. $42.200 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Die Kollisionsgeschwindigkeit beträgt also (unter den vereinfachenden Annahmen) $72.200 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Die zugehörige Bewegungsenergie beträgt $W = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 10^6 \cdot 72.200^2 \text{ J} = 1,3 \cdot 10^{16} \text{ J}$. Die gesamte Energie, die die Hiroshima-Bombe *Little Boy* am 6. August 1945 freisetzte, betrug übrigens $5,44 \cdot 10^{13} \text{ J}$. Der Meteorit würde die 240-fache Energie mitbringen. Legen Sie ein kurzes Gedenken an die Dinosaurier ein.

5.4 Keplers zweites und drittes Gesetz

Stellen wir uns die Bewegung eines Körpers um ein Zentralgestirn von einem Punkt *A* über einen Punkt *B* zu einem Punkt *C* vor, wobei der Weg von *A* nach *B* und der von *B* nach *C* in gleichen, sehr kurzen Zeitintervallen Δt durchlaufen wird. Näherungsweise können wir vereinfachend davor ausgehen, dass das Wegstückchen von *A* nach *B* und dann wieder das von *B* nach *C* geradlinig verlaufen wird, und wir erhalten die folgende Skizze:



Das Zentralgestirn soll sich im Punkt S befinden; während der Zeit Δt überstreicht der Fahrstrahl die Fläche des Dreiecks SAB . Für die Fortsetzung des Weges denken wir uns die zwei wirksamen Umstände getrennt:

Nach Newtons erstem Axiom möchte der Körper eigentlich seine Bewegung geradeaus mit unveränderter Geschwindigkeit fortsetzen; dann würde er in Punkt D auskommen und die Strecken AB und BD wären gleich lang.

Die Zentralkraft aber zieht den Körper von Punkt B aus auf S zu; würde nur sie (auf einen dazu bei B stillstehend gedachten Körper) wirken, so gelangte der Körper von B aus zu E .

In Wirklichkeit finden beide Effekte gleichzeitig statt: sie überlagern sich.

Nun haben die Dreiecke ABS und BDS gleichlange und kollineare Grundseiten \overline{AB} und \overline{BD} und offenbar gleiche Höhen, nämlich das Lot von S auf die Gerade durch A und B ; also sind sie flächengleich:

$$\mathfrak{F}(ABS) = \mathfrak{F}(BDS).$$

Aber auch BDS und BCS haben eine gleiche Grundseite - nämlich SB - und gleiche Höhen, da C auf einer Parallelen zu SB durch D verläuft. Also sind auch sie flächengleich:

$$\mathfrak{F}(BDS) = \mathfrak{F}(BCS).$$

Schaut man beide Gleichungen an, so findet man:

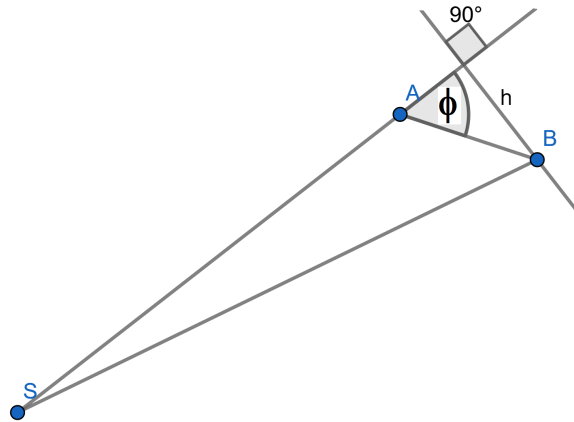
$$\mathfrak{F}(ABS) = \mathfrak{F}(BCS).$$

Der Fahrstrahl überstreicht also im kurzen Zeitintervall Δt jeweils gleiche Flächensegmente. Da man jedes Zeitintervall als Summe kurzer Zeitintervalle auffassen kann und dabei der Fahrstrahl dann insgesamt auch die Summe der während dieser kurzen Zeitintervalle überstrichenen Fläche überstreicht, gilt also:

Satz 5.1. *Der von einem Zentralgestirn aus zu einem sich im Gravitationsfeld bewegende Fahrstrahl überstreicht in gleichen Zeiten auch gleich große Flächen.*

Dieser Zusammenhang wird als Keplers 2. Gesetz bezeichnet. Schauen wir noch einmal auf das Bild zur Herleitung: Wenn wir mit ϕ_1 wie im Kapitel über Kegelschnitte den Winkel

zwischen dem Fahrstrahl und der Bewegungsrichtung im Punkt A verstehen und die Geschwindigkeit im Punkt A mit v_1 bezeichnen, so ist $AB = v_1 \cdot \Delta t$. Wir bezeichnen die Länge von AS vereinfachend mit r_1 und finden nun für die Höhe der Dreiecks ABS offenbar: $h = v_1 \cdot \Delta t \cdot \sin(\phi_1)$.



Die Fläche des Dreiecks ist also

$$\mathfrak{F}(ABS) = \frac{1}{2} \cdot r_1 \cdot v_1 \cdot \Delta t \cdot \sin(\phi_1).$$

Analog gilt für das Dreieck BCS also:

$$\mathfrak{F}(BCS) = \frac{1}{2} \cdot r_2 \cdot v_2 \cdot \Delta t \cdot \sin(\phi_2).$$

Wegen Keplers zweitem Gesetz sind beide Produkte gleich, und wir finden die fundamentale Gleichung

$$r_1 \cdot v_1 \cdot \sin(\phi_1) = r_2 \cdot v_2 \cdot \sin(\phi_2).$$

Das dritte Gesetz, das Kepler fand, soll hier nicht hergeleitet sondern nur zitiert werden. Es beschäftigt sich mit der Frage, ob zwischen den elliptischen Bahnen zweier verschiedener Körper, die sich im Gravitationsfeld eines Zentralgestirns bewegen, Zusammenhänge bestehen. Bei der Herleitung müssen wir wieder davon absehen, dass die beiden Körper ja auch Gravitationskräfte aufeinander ausüben; diese werde im Vergleich zu der Gravitationswirkung des Zentralgestirns als vernachlässigbar betrachtet.

Satz 5.2. Wenn sich im Gravitationsfeld eines Zentralgestirns zwei Körper auf elliptischen Bahnen bewegen, dann verhalten sich die Quadrate ihrer Umlaufzeiten wie die dritten Potenzen der großen Halbachsen ihrer Umlaufbahnen:

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}.$$

5.5 Endlich: Kegelschnitte im Weltall

Wenn sich ein Körper im Gravitationsfeld eines Zentralgestirns bewegt, dann gelten für je zwei Zeitpunkte stets folgende Gleichungen:

$$v_1^2 - v_2^2 = 2\gamma M \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

$$r_1 \cdot v_1 \cdot \sin(\phi_1) = r_2 \cdot v_2 \cdot \sin(\phi_2)$$

Wenn wir mit den Daten r_0, ϕ_0 und v_0 (statt r_1, ϕ_1, v_1) also den Zustand zu einem ersten feststehenden Zeitpunkt beschreiben und mit r, ϕ und v (statt r_2, ϕ_2, v_2) die Daten zu einem beliebigen anderen Zeitpunkt, so haben wir in günstigerer Schreibweise:

$$v_0^2 - v^2 = 2\gamma M \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r} \right)$$

$$r_0 \cdot v_0 \cdot \sin(\phi_0) = r \cdot v \cdot \sin(\phi)$$

Die erste Gleichung lösen wir nach v^2 auf und multiplizieren sie mit r^2 ; die zweite Gleichung quadrieren wir und lösen sie nach $r^2 v^2$ auf. So erhalten wir:

$$r^2 v^2 = v_0^2 r^2 - \frac{2\gamma M}{r_0} r^2 + 2\gamma M r,$$

$$r^2 v^2 = \frac{r_0^2 v_0^2 \sin^2(\phi_0)}{\sin^2(\phi)}.$$

Das setzen wir gleich; dabei bedenken wir, dass durch $v_{\text{Flucht}} = \sqrt{\frac{2\gamma M}{r_0}}$ gerade die Fluchtgeschwindigkeit des Körpers aus der Position r_0 gegeben war. So erhalten wir

$$v_{\text{Flucht}}^2 \cdot r_0 \cdot r + (v_0^2 - v_{\text{Flucht}}^2) \cdot r^2 = \frac{r_0^2 v_0^2 \sin^2(\phi_0)}{\sin^2(\phi)}.$$

Mit

$$A = v_{\text{Flucht}}^2 \cdot r_0, \quad B = (v_0^2 - v_{\text{Flucht}}^2), \quad C = r_0^2 v_0^2 \sin^2(\phi_0)$$

entsteht so die Gleichung

$$A \cdot r + B \cdot r^2 = \frac{C}{\sin^2(\phi)}$$

die wir als Beschreibung der Kegelschnitte bereits kennengelernt haben (vgl. Satz 4.3). Alles kommt auf das Vorzeichen von B an.

So haben wir also bewiesen:

Satz 5.3. *Die Bahn eines Körpers, der sich frei im Gravitationsfeld eines Zentralgestirns bewegt, hat stets die Gestalt eines Kegelschnittes: es handelt sich*

- *um eine Ellipse, falls zu einem Zeitpunkt die Geschwindigkeit kleiner als die Fluchtgeschwindigkeit aus der gerade vorhandenen Entfernung ist: $v_0 < v_{\text{Flucht}}$*

- um eine Parabel, falls zu einem Zeitpunkt die Geschwindigkeit gleich Fluchtgeschwindigkeit aus der gerade vorhandenen Entfernung ist: $v_0 = v_{\text{Flucht}}$
- um eine Hyperbel, falls zu einem Zeitpunkt die Geschwindigkeit größer als die Fluchtgeschwindigkeit aus der gerade vorhandenen Entfernung ist: $v_0 > v_{\text{Flucht}}$.

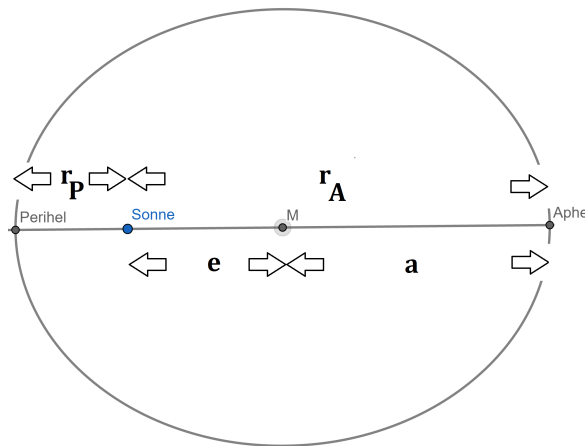
Dies ist Keplers erstes Gesetz über die Planetenbahnen.

5.6 Apsiden

Den sonnennächsten Punkt der Umlaufbahn eines Planeten nennt man sein *Perihel*, den der Sonne fernsten Punkt sein *Aphel*; der Oberbegriff über beides heißt *Apsiden*. In den Apsiden tritt der besondere Fall ein, dass der Geschwindigkeitsvektor senkrecht auf dem Fahrstrahl steht; mit $\phi = 90^\circ$. Nun ist $\sin^2(90^\circ) = 1$; sind also zu irgendeinem Zeitpunkt t_0 die „Bahndaten“ r_0, ϕ_0, v_0 eines Planeten bekannt, so kann man die *Apsidenradien* r_A und r_P aus der Gleichung

$$v_{\text{Flucht}}^2 \cdot r_0 \cdot r + (v_0^2 - v_{\text{Flucht}}^2) \cdot r^2 = r_0^2 v_0^2 \sin^2(\phi_0)$$

berechnen: Die Apsidenradien ergeben sich als Lösungen dieser quadratischen Gleichung. Für eine elliptische Bahn kann man nun den Zusammenhang der Apsidenabstände von der Sonne mit den Achsenlängen der Ellipse leicht erkennen:



Mit $r_P = a - e$, $r_A = a + e$ erhalten wir

$$r_P + r_A = 2a,$$

$$r_P \cdot r_A = (a - e)(a + e) = a^2 - e^2 = b^2,$$

oder, anders formuliert

$$a = \frac{r_P + r_A}{2}, \quad b = \sqrt{r_P \cdot r_A}.$$

Die Geschwindigkeiten an den Apsidenpunkten ergeben sich mit Hilfe des zweiten Keplerschen Gesetzes leicht: Aus der Gleichung $r_1 v_1 \sin(\phi_1) = r_2 v_2 \sin(\phi_2)$ erhält man mit $r_1 =$

r_A , $\sin(\phi_1) = 1$, $r_2 = r_P$, $\sin(\phi_2) = 1$ für die Apsidengeschwindigkeiten v_A und v_P die Gleichung

$$r_A \cdot v_A = r_P \cdot v_P$$

und für eine elliptische Bahn aus der Energieerhaltungsgleichung

$$v_P^2 - v_A^2 = 2\gamma M \left(\frac{1}{r_P} - \frac{1}{r_a} \right)$$

dann

$$v_P^2 - \frac{r_P^2}{r_A^2} \cdot v_P^2 = 2\gamma M \left(\frac{1}{r_P} - \frac{1}{r_a} \right),$$

$$v_P^2 \cdot \left(1 - \frac{r_P^2}{r_A^2} \right) = \frac{2\gamma M}{r_P} \left(1 - \frac{r_P}{r_A} \right),$$

und wenn man jetzt unter Beachtung der dritten binomischen Formel durch $\left(1 - \frac{r_P}{r_A} \right)$ dividiert, so ergibt sich

$$v_P^2 \cdot \left(1 + \frac{r_P}{r_A} \right) = v_P^2 \cdot \frac{r_A + r_P}{r_A} = \frac{2\gamma M}{r_P}.$$

Für die Apsidengeschwindigkeiten ergibt sich also:

$$v_P^2 = \frac{2\gamma M}{r_A + r_P} \cdot \frac{r_A}{r_P}, \quad v_A^2 = \frac{2\gamma M}{r_A + r_P} \cdot \frac{r_P}{r_A}$$

Übung 5.6. Natürlich gilt das alles auch, wenn das Zentralgestirn nicht die Sonne und der seine Bahn ziehende Körper ein Planet ist, sondern auch, wenn ein Satellit sich um die Erde bewegt. Dann spricht man nicht mehr von Perihel (darin steckt das griechische Wort Helios für Sonne), sondern spricht nun vom *Perigäum* und auch vom *Apogäum* statt vom Aphel. Die Positionsbestimmung eines Satelliten, der sich im Gravitationsfeld der Erde bewegt, ergab zu einem Zeitpunkt die Daten $r_0 = 8,45 \cdot 10^6$ m, $v_0 = 7950 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ und $\phi_0 = 106,2^\circ$.

- Berechnen Sie die Entfernung von der Erde im Apogäum, im Perigäum; berechnen Sie die Halbachsen der Ellipse, deren lineare und numerische Exzentrizität.
- Berechnen Sie die Geschwindigkeit im Apogäum und im Perigäum!
- Berechnen Sie die Umlaufzeit des Satelliten; gehen Sie davon aus, dass für den Mond, der um die Erde kreist, ja die Daten eines Körpers im Gravitationsfeld der Erde bekannt sind (kreisförmige Bahn, Radius vom Erdmittelpunkt aus gemessen 384.700 km, Umlaufzeit 27,32 Tage)!
- Berechnen Sie die Geschwindigkeit, die man dem Satelliten im Apogäum zusätzlich vermitteln müsste, um ihn auf eine Parabelbahn zu bringen!

Lösung 5.6. In der folgenden Lösungsskizze sind alle vom Taschenrechner angezeigten Dezimalstellen notiert. Das suggeriert eine aus physikalischer Sicht ungerechtfertigte Genauigkeit. Es geschieht hier insbesondere bei Zwischenergebnissen dennoch, um dem Leser die

Kontrolle seiner Ergebnisse zu erleichtern; mit den angegebenen Werten wurde dann nämlich weiter gerechnet.¹

Zum Zeitpunkt der Positionsmessung des Satelliten beträgt seine Fluchtgeschwindigkeit

$$v_{\text{Flucht}} = \sqrt{\frac{2\gamma M}{r_0}} \approx 9.715,216661 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Da die gemessene Bahngeschwindigkeit v_0 kleiner als diese Fluchtgeschwindigkeit ist, befindet sich der Satellit in der Tat auf einer Ellipsenbahn.

Die quadratische Gleichung

$$v_{\text{Flucht}}^2 \cdot r_0 \cdot r + (v_0^2 - v_{\text{Flucht}}^2) \cdot r^2 = r_0^2 v_0^2 \sin^2(\phi_0)$$

nimmt nach den passenden Umformungen die folgende Gestalt an:

$$r^2 - \mathfrak{A}r + \mathfrak{B} = 0$$

mit $\mathfrak{A} = 25.576.709,08$ und $\mathfrak{B} = 1,334562065 \cdot 10^{14}$, wobei hier die Einheiten nicht mit notiert sind. Das ergibt als Lösungen die Apogäumsdistanz r_A und die Perigäumsdistanz r_P mit $r_A = 7.303.301,638$ und $r_P = 18.273.407,44$ (jeweils in Metern).

Daraus wiederum ergeben sich die große Halbachse a und die kleine Halbachse b zu $a = \frac{r_A + r_P}{2} \approx 12.788.354,54$ und $b = \sqrt{r_A \cdot r_P} \approx 11.552.324,72$ (wiederum jeweils in Metern). Mit $e = \sqrt{a^2 - b^2}$ ergibt sich die lineare Exzentrizität zu $e \approx 54.850.052,908$ und daraus die numerische Exzentrizität zu $\varepsilon = \frac{e}{a} \approx 0,4289099814$.

Aus den bekannten Formeln für die Apogäumsgeschwindigkeiten ergibt sich $v_A \approx 8.833,008995$ und $v_P \approx 3.530,273669$ (jeweils in $\frac{\text{m}}{\text{s}}$).

Nach Keplers drittem Gesetz gilt für den Zusammenhang zwischen der Mondbahn ($T_{\text{Mond}} = 2.360.448$ s, $a_{\text{Mond}} = 384.700.000$ m) und der Satellitenbahn die Gleichung

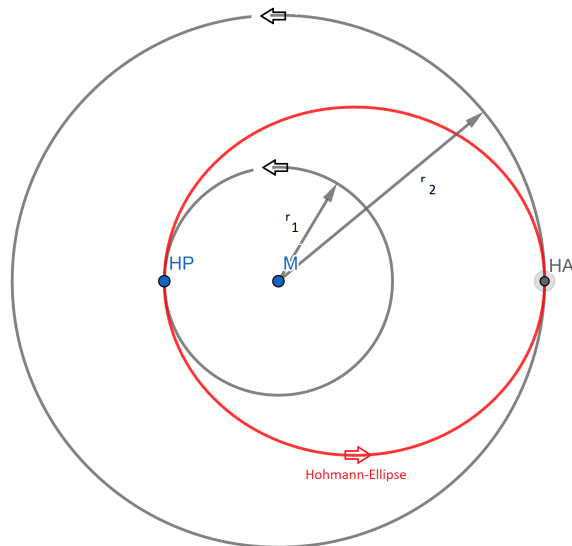
$$T_{\text{Sat}} = \sqrt{\frac{a^3}{a_{\text{Mond}}^3}} \cdot T_{\text{Mond}}^2 \approx 14.306,49212\text{s}.$$

Im Apogäum beträgt die Fluchtgeschwindigkeit, die ja notwendig ist, um den Satelliten auf eine Parabelbahn zu bringen, $v_{\text{Flucht}} = \sqrt{\frac{2\gamma M}{r_A}} \approx 10.450,11899 \frac{\text{m}}{\text{s}}$; das sind $1.617,109997 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ mehr als die Apogäumsgeschwindigkeit.

Übung 5.7. Ein Satellit bewegt sich auf einer kreisförmigen Bahn mit Radius r_1 um den Erdmittelpunkt und soll auf eine weiter entfernte Bahn mit Radius r_2 gebracht werden. Dazu verwendet man folgendes Verfahren²:

¹Außer mit den gegebenen Daten wird mit $\gamma = 6,673 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2}$, $M = 5,976 \cdot 10^{24} \text{kg}$ gerechnet. Der besseren Lesbarkeit wegen sind Zifferngruppen von drei Ziffern durch Punkte getrennt.

²Das Verfahren trägt den Namen des deutschen Bauingenieurs *Walter Hohmann*, 1880-1945, obwohl es von *Konstantin Eduardowitsch Ziolkowski* schon 1911 entdeckt worden war, von Hohmann aber 1925 veröffentlicht wurde. Außer - eher hobbymäßig - mit Fragen der Weltraumfahrt war Hohmann mit Fragen von Stahlkonstruktionen beschäftigt: er war an der Konstruktion des Riesenrades im Wiener Prater beteiligt. Hohmann gehörte aber nicht zu den Rüstungs- und Raketenexperten, die für die Nationalsozialisten in Peenemünde an der Raketenkonstruktion beteiligt waren und den Tod von 20.000 Häftlingen des KZ Mittelbau-Dora für die Konstruktion in Kauf nahmen.



An einem Punkt HP (für Hohmann-Perigäum) wird dem Satelliten eine zusätzliche Geschwindigkeit verliehen, die ihn auf eine solche Ellipsenbahn ablenkt, die den äußeren Kreis im Punkt HA berührt. Dort wird der Satellit wieder beschleunigt, sodass er danach auf der größeren Kreisbahn verbleibt.

- Berechnen Sie die Parameter (große Halbachse, kleine Halbachse, lineare Exzentrizität) der Hohmann-Ellipse aus den gegebenen Größen!
- Berechnen Sie die Geschwindigkeit, die der Satellit in HP erreichen muss, um auf die elliptische Bahn zu geraten!
- Berechnen Sie die Geschwindigkeit, die der Satellit dann in HA erhalten muss, um auf die größere Kreisbahn zu gelangen!

Lösung 5.7. Offenbar ist M ein Brennpunkt der Ellipse; der andere Brennpunkt liegt auf der Strecke $\overline{HP, HA}$ im Abstand r_1 von HA . Damit ist die große Halbachse gegeben zu $a = \frac{r_1+r_2}{2}$. Die lineare Exzentrizität (Abstand des Ellipsenmittelpunktes und einem Brennpunkt) beträgt also $e = \frac{r_1+r_2}{2} - r_1 = \frac{r_2-r_1}{2}$, und daraus ergibt sich die kleine Halbachse zu $b = \sqrt{a^2 - e^2} = \sqrt{r_1 \cdot r_2}$. Die Apsidengeschwindigkeit auf der Hohmann-Ellipse beträgt im Perigäum HA

$$v_{HP} = \sqrt{\frac{2\gamma M_{\text{Erde}}}{r_2 + r_1} \cdot \frac{r_2}{r_1}}$$

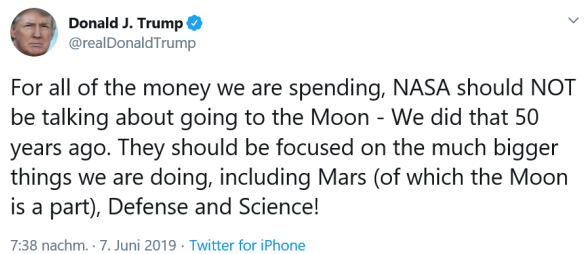
Um in HA auf die Kreisbahn zu gelangen, muss die Geschwindigkeit so groß sein, dass die Zentripetalkraft gerade durch die Gravitationskraft des „Zentralgestirns“, hier also der Erde, gegeben ist. Im Kapitel über Kreisbewegungen haben wir dafür die Bedingung

$$v = \sqrt{\frac{\gamma M_{\text{Erde}}}{r_2}}$$

hergeleitet.

Kapitel 6

Eine Reise zum Mars

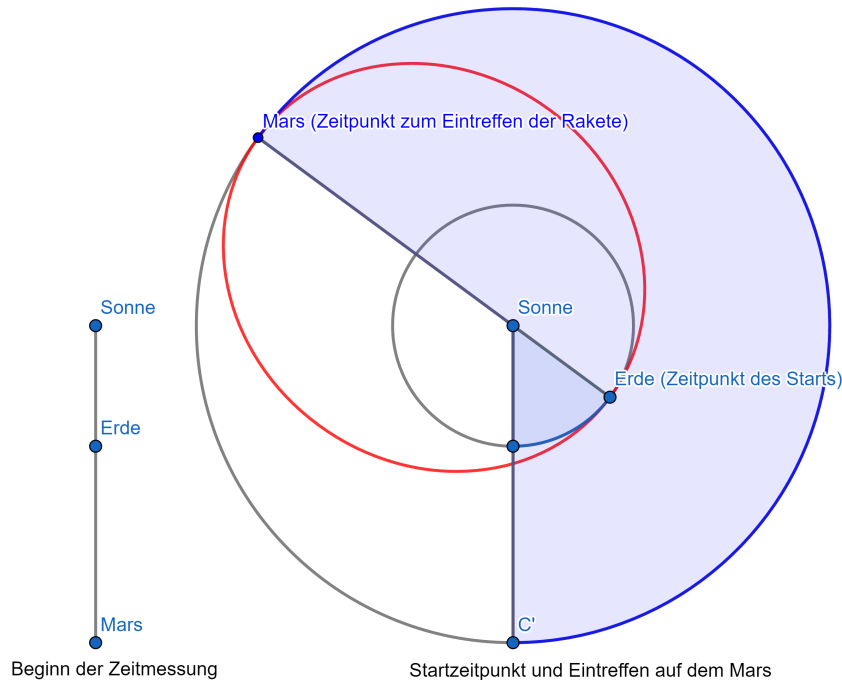


Wir berechnen - unter einigen vereinfachenden Annahmen - einige Zeitdaten, die mit der Reise zum Mars verbunden sind.

Zunächst die vereinfachenden Annahmen: Wir gehen davon aus, dass die Erde und der Mars sich auf kreisförmigen Bahnen bewegen; die Erde hat dabei eine Umlaufzeit von $T_E = 3,1536 \cdot 10^7$ s und eine Winkelgeschwindigkeit von $\omega_E = \frac{2\pi}{T_E} = 1,9924 \cdot 10^{-7} \text{ s}^{-1}$. Die entsprechenden Marsdaten sind $T_M = 5,9457 \cdot 10^7$ s und $\omega_M = \frac{2\pi}{T_M} = 1,0585 \cdot 10^{-7} \text{ s}^{-1}$. Der Bahnradius der Erde a_R beträgt $1,469 \cdot 10^{11}$ m.

Da die numerische Exzentrizität der Erdbahn nur 0,01671 und die der Marsbahn nur 0,09302 beträgt, ist die Annahme kreisförmiger Bahnen nicht völlig abwegig.

Wir beginnen mit der Zeitmessung zu einem Zeitpunkt, an dem die Sonne, die Erde und der Mars in einer Linie zueinander stehen. Wir starten den Marsflug zu einem Zeitpunkt t_S und fliegen auf einer Hohmann-Ellipse zum Mars; die Flugzeit soll t_H heißen. Nun ist das Problem, dass der Mars sich während des Fluges ja weiterbewegt und wir den Startzeitpunkt so wählen müssen, dass der Flug auf der Hohmann-Ellipse den Mars genau in ihrem Aphel trifft; der Mars muss sich in dem Moment der Marslandung genau „gegenüber“ jenes Standpunktes der Erde befinden, also auf der entgegengesetzten Seite der Sonne, den die Erde zum Zeitpunkt t_S eingenommen hatte.



Es ergibt sich die Gleichung

$$(t_S + t_H) \cdot \omega_M = t_s \cdot \omega_E + \pi + 2n\pi \quad (6.1)$$

für ein geeignetes $n \in \mathbb{N}$; schließlich könnte der Mars ein paar Runden um die Sonne gedreht haben, während wir den Startzeitpunkt suchen oder unterwegs sind.

Dann verbleiben wir eine Zeitlang auf dem Mars, um die Landschaft zu erkunden. Der Rückflug startet zum Zeitpunkt t_R und führt uns wieder auf einer Hohmann-Ellipse während der (gleichen!) Flugzeit t_H zurück zur Erde. Natürlich muss der Startzeitpunkt wieder so gewählt werden, dass der Flug auf der Hohmann-Ellipse uns in dem Moment durch sein Perihel führt, wenn sich in diesem Moment dort die Erde befindet.

Dies wiederum führt zu der Gleichung

$$(t_R + t_H) \cdot \omega_E = t_R \cdot \omega_M + \pi + 2m\pi \quad (6.2)$$

für ein geeignetes $m \in \mathbb{N}$.

Die Berechnung der Flugzeit der Hohmann-Ellipse ergibt sich mit Hilfe des dritten Kepler-Gesetzes, das wir anwenden auf die Erde und den Satelliten, die beide auf Bahnen um die Sonne kreisen. Für die Erde ist die Umlaufzeit T_E gegeben; der Radius der Erdbahn ist $a_E = 1,496 \cdot 10^{11}$ m. Für den Satelliten auf der Hohmann-Ellipse ist die große Halbachse gegeben zu $a_S = \frac{a_E + a_M}{2} = 1,8875 \cdot 10^{11}$ m. Nach dem dritten Keplerschen Gesetz ist die Umlaufzeit

des Satelliten auf der ganzen Hohmann-Ellipse also berechenbar zu

$$T_S = \sqrt{\frac{a_S^3}{a_E^3}} \cdot T_E^2 \approx 4,469 \cdot 10^7 \text{ s.}$$

Die Zeit t_H ist die halbe Umlaufzeit: $t_H \approx 2,235 \cdot 10^7 \text{ s} \approx 258,7 \text{ d.}$

Übung 6.1.

- Stellen Sie die Gleichungen 6.1 und 6.2 um, addieren Sie sie und leiten Sie den Zusammenhang

$$t_R - t_S = \frac{2\pi}{\omega_E - \omega_M} \cdot k + \frac{\omega_E + \omega_M}{\omega_E - \omega_M} \cdot t_H \quad (6.3)$$

her; darin steht k für $n + m + 1 \in \mathbb{N}$.

- Berechnen Sie nun, wie lange die kürzestmögliche Zeitdauer für eine Reise zum Mars, die Landschaftserkundung und den Rückflug ist!
- Stellen Sie sich vor, dass der Kommandant des Raumschiffs den frühesten Rückstartzeitpunkt verpasst. Wie lange müssen der Astronauten auf dem Mars auf das nächste mögliche „Startfenster“ warten? Wie viele Startfenster müsste der Kommandant verpassen, um die gesamte Amtszeit eines amerikanischen Präsidenten (4 Jahre) auf dem Mars zu verbringen?

Lösung 6.1. Aus den Gleichungen 6.1 und 6.2 ergibt sich durch Umstellung:

$$t_S \cdot (\omega_M - \omega_E) = -t_H \cdot \omega_M + \pi + 2n\pi$$

$$t_R \cdot (\omega_E - \omega_M) = -t_H \cdot \omega_E + \pi + 2m\pi$$

Durch Addition erhält man

$$(t_R - t_S)(\omega_E - \omega_M) = -t_H(\omega_E + \omega_M) + 2(n + m + 1)\pi$$

und daraus sofort die gesuchte Gleichung.

Aus der Gleichung 6.3 finden wir für $k = 1$ keine sinnvolle Lösung: das Startfenster läge schon vor dem Eintreffen auf dem Mars. Für $k = 2$ erhalten wir $t_R - t_S \approx 6,155 \cdot 10^7 \text{ s} \approx 712,39 \text{ d}$. Die Marsreise würde also ca. $258,7 \text{ d} + 712,4 \text{ d} = 971,1 \text{ d}$ in Anspruch nehmen. Für jede Erhöhung von k um den Summanden 1 kommt ein Zeitraum von ca. $778,7 \text{ d}$ dazu, ehe das nächste Startfenster beginnt. Um die Amtszeit eines amerikanischen Präsidenten auf dem Mars zu überdauern, müsste man also nur ein Startfenster versäumen und wäre $1749,8 > 4 \cdot 365$ Tage vor ihm in Sicherheit.

Kapitel 7

Raketenantrieb

Dem Raketenantrieb liegt das physikalische *Gesetz der Impulserhaltung* zugrunde. Dieses Gesetz nennt eine weitere Größe, die in einem mechanisch abgeschlossenen System erhalten bleibt; diese Größe heißt Impuls. „Mechanisch abgeschlossen“ bedeutet wiederum, dass das System nicht in Wechselwirkung mit seiner Umgebung steht.

Unter dem Impuls eines Körpers versteht man das Produkt aus seiner Masse und seinem Geschwindigkeitsvektor; der Impuls ist also selbst wieder eine vektorielle Größe, die die gleiche Richtung hat wie der Geschwindigkeitsvektor und deren Größe gegeben ist als Produkt der Masse des Körpers mit der Größe seiner Momentangeschwindigkeit („*speed*“). Gerade bei Raketen ist es wichtig, darauf zu achten, dass sich während der Brenndauer der Triebwerke nicht nur die Raketengeschwindigkeit ändert, sondern auch die Masse der Rakete. Wenn man den Gesamtimpuls eines Systems, das aus mehreren Körpern besteht, berechnen will, so muss man die Impulse der einzelnen Körper addieren – und zwar vektoriell. Impulse werden in der Einheit $\frac{\text{kg}\cdot\text{m}}{\text{s}}$ gemessen.

Das System, das aus der am Boden stehenden Rakete und dem in ihr enthaltenen Brennstoff besteht, hat vor dem Start offenbar den Gesamtimpuls 0. (Hier sollte eigentlich $\vec{0}$ stehen, denn der Impuls ist ja ein Vektor, und der hat gerade die Länge 0.)

Nun beginnt der Treibstoff aus dem Düsentriebwerk auszuströmen; dies geschieht mit großer Geschwindigkeit. Bei dem Triebwerk *C 1000 K*, das bei der Ariane 5 eingesetzt wurde, treten pro Sekunde 234kg Treibstoff aus der Rakete aus (dies nennt man den „Treibstoffdurchsatz“ und bezeichnet ihn mit dem Buchstaben μ , also $\mu = 234 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$), und die Ausströmgeschwindigkeit (bezeichnet mit w) beträgt $4.316 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Das bedeutet, dass der Treibstoff in der ersten Sekunde einen Impuls der Größe $p = 234 \cdot 4316 \frac{\text{kg}\cdot\text{m}}{\text{s}} = 1.009.944 \frac{\text{kg}\cdot\text{m}}{\text{s}}$ entwickelt hat, und dieser Impuls ist gegen den Boden gerichtet.

Die Rakete müsste, damit der Gesamtimpuls den Wert 0 behält, also einen entgegengesetzten Impuls erfahren: hat sie anfangs also z.B. eine Masse von 100.000 kg, so muss sie sich mit einer Geschwindigkeit von $v_R = \frac{1.009.944}{100.000} \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 10,099 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ bewegen. Der ausströmende Treibstoff bewirkt eine Beschleunigung der Rakete, verursacht also eine „Schubkraft“ der Größe

$$S = 100000 \text{ kg} \cdot \frac{10,099 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{1 \text{ s}} = 1009944 \text{ N, allgemeiner:}$$

$$S = \mu \cdot w .$$

Leider wirkt dieser Schubkraft jedoch auch noch die bisher nicht berücksichtigte Gewichtskraft der Rakete entgegen; diese können wir in der Nähe der Erdoberfläche modellieren durch

$$G = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 100000 \text{ kg} \approx 981000 \text{ N} .$$

Insgesamt bewirken Schub und Gewicht also eine Kraft von $F = 1.009.944 \text{ N} - 981.000 \text{ N} = 28.944 \text{ N}$ auf die Rakete, was also eine Beschleunigung von $\frac{28.944 \text{ m}}{100.000 \text{ s}^2}$ bewirkt. Nach einer Sekunde würde die Rakete also eine Geschwindigkeit von ca. $0,289 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ erreicht haben.

Nun verändert sich die Situation: während des Ausstoßes von Treibstoff wird die Rakete ja leichter. Wenn die Rakete die Anfangsmasse m_0 hatte und davon der Teil m_T auf den Treibstoffvorrat entfiel, so ist bei gleichmäßigem Treibstoffdurchsatz μ nach der Zeit t ja nur noch die Masse $m_T - \mu \cdot t$ an Treibstoff an Bord; die Masse der Rakete beträgt nun also $m_0 - \mu \cdot t$. In der nächsten Sekunde bewirkt der konstant gleiche Schub also eine größere Geschwindigkeitsänderung der Rakete. Offenbar ist hier das Euler-Verfahren das Mittel, um die Geschehnisse quantitativ zu verfolgen. Wieder sind unsere Überlegungen nur näherungsweise richtig: Schon während der erste Sekunde verändert sich die Masse der Rakete ja kontinuierlich, beträgt also nicht während der gesamten Zeitspanne immer 100.000 kg. Wir haben den Massenverlust (234 kg Treibstoff sind ausgeströmt) aber als vergleichsweise so klein erachtet, dass wir ihn vernachlässigt haben.

Übung 7.1. Verfolgen Sie die Geschwindigkeitsentwicklung der Rakete mit den angegebenen Daten mit Hilfe einer Tabellenkalkulation während der ersten 10 Sekunden!

Lösung 7.1. Dem Rechengang aus den bisherigen Ausführungen folgend erhält man folgende Tabelle:

Zeit		Masse der Rakete	Gewichtskraft	Schubkraft	wirksame Kraft	Beschleunigung	Geschwindigkeit vorher	Geschwindigkeit nachher
von [s]	bis [s]	in kg	in N	in N	in N	in m/s ²	in m/s	in m/s
0	1	100000,00000	981000,00000	1009944,00000	28944,00000	0,28944	0,00000	0,28944
1	2	99766,00000	978704,46000	1009944,00000	31239,54000	0,31313	0,28944	0,60257
2	3	99532,00000	976408,92000	1009944,00000	33535,08000	0,33693	0,60257	0,93950
3	4	99298,00000	974113,38000	1009944,00000	35830,62000	0,36084	0,93950	1,30034
4	5	99064,00000	971817,84000	1009944,00000	38126,16000	0,38486	1,30034	1,68520
5	6	98830,00000	969522,30000	1009944,00000	40421,70000	0,40900	1,68520	2,09420
6	7	98596,00000	967226,76000	1009944,00000	42717,24000	0,43326	2,09420	2,52746
7	8	98362,00000	964931,22000	1009944,00000	45012,78000	0,45762	2,52746	2,98508
8	9	98128,00000	962635,68000	1009944,00000	47308,32000	0,48211	2,98508	3,46719
9	10	97894,00000	960340,14000	1009944,00000	49603,86000	0,50671	3,46719	3,97390