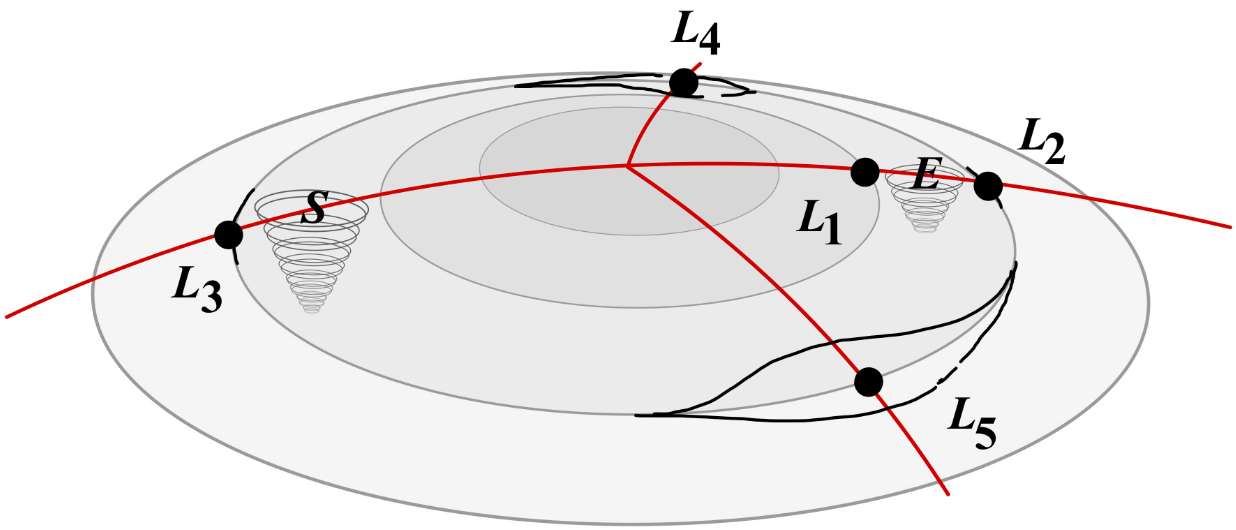
TEACHER GUIDE

Die Lagrange-Punkte des Erde-Sonne Systems



Germany esero EUROPEAN SPACE EDUCATION RESOURCE OFFICE
A collaboration between ESA & national partners
Vom Weltall ins ~~Klassen~~ Wohn-zimmer

AIRUB
Astronomisches Institut
RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM

Die Lagrange-Punkte des Erde-Sonne Systems

Weltraumteleskope und die Lagrange-Punkte des Sonnensystems

Kurzbeschreibungen

Die Lagrange- oder Librationspunkte sind die Gleichgewichtspunkte des sogenannten eingeschränkten Dreikörperproblems. Dabei handelt es sich im Allgemeinen um 5 ausgezeichnete Punkte in einem System zweier Himmelskörper, an denen sich leichtere Körper, wie z.B. Satelliten, nahezu ohne eigenen Antrieb aufhalten können. Es besteht daher ein starkes Interesse derartige Bereiche für Satellitenmissionen, insbesondere für die Positionierung von Weltraumteleskopen, zu nutzen. Die Schülerinnen und Schüler sollen die Lage der Lagrange-Punkte L1 bis L5 unseres Sonnensystems und deren wissenschaftlichen Nutzen kennenlernen. Es werden die Satellitenprogramme *Herschel* und *Planck,* sowie das *James Webb Space Telescope* vorgestellt. Anhand einiger einfacher Rechnungen wird weiter ein Eindruck davon vermittelt, mit welchen Geschwindigkeiten sich Satelliten auf ihren Orbits bewegen und welche weiteren Anforderungen damit verbunden sind.

FAST FACTS

Fach: *Physik*
Alter: *ab 15 Jahre (Oberstufe)*
Typ: *Vortrag und aktive Teilnahme*
Schwierigkeitsgrad: *leicht*
Zeitrahmen: *45 Minuten*
Kosten: *keine*
Ort: *online, Klassenraum*
Materialien: *Taschenrechner, Schreibmaterialien, Geodreieck, Zirkel, (alternativ auch Tablet), gegebenenfalls Internetzugang, gegebenenfalls Präsentationsfolien*
Schlüsselwörter: *Physik, Satelliten, Satellitenmissionen, Raumfahrt, Lagrange-Punkte, Librationspunkte, Herschel, Planck, Orbitalgeschwindigkeit*

Lernziele

Schülerinnen und Schüler lernen, dass es ausgezeichnete Punkte bzw. Bereiche gibt, die aus bestimmten Konstellation von Himmelskörpern resultieren. Dies sind hervorragende Stützpunkte für z.B. Weltraumteleskope. Weiter können auf einfache Art und Weise z.B. Satellitenorbits und die entsprechenden Orbitalgeschwindigkeiten berechnet werden, die in der Raumfahrt von Bedeutung sind.

Zusammenfassung der Aktivität

#	Titel	Beschreibun	Ergebnis	Anforderung	Zeit
1	Einführung - Librationspunkte unseres Sonnensystems	Ein erstes Kennenlernen der Lagrange-Punkte L1 bis L5	Schülerinnen und Schüler lernen, dass es ausgezeichnete Punkte bzw. Bereiche gibt, weshalb diese existieren und welcher wissenschaftliche Nutzen daraus resultiert	Mechanik	10 bis 15 Minuten
2	Der Lagrange-Punkt L2 und die Satellitenmissionen Herschel und Planck	Warum und wofür ist L2 ein guter Stützpunkt im All?! Hier werden die Eigenschaften von L2 aufgezeigt und die Missionen von Herschel und Planck	Schülerinnen und Schüler lernen die Satellitenmissionen Herschel und Planck kennen, und weshalb L2 gewählt wurde	Mechanik und #1	10 bis 15 Minuten
3	Satellitenorbits	Einfache Berechnungen zu Satelliten und deren Bahnen	Schülerinnen und Schüler erhalten einen Eindruck über einige Dimensionen u. Parameter	Mechanik, #1 und #2	15 bis 20 Minuten

 # - Unternummer zu der Aktivität

Hinweise

Wenn Sie Interessen haben, einem unserer Workshops mit Ihrer Klasse durchzuführen, melden Sie sich bitte unter *esero@astro.rub.de*. Wir unterstützen Sie gerne bei der Durchführung!

Bildquellen

Titelbild:

„Zeichnung des Lagrange-Systems Erde-Sonne“ von John Martin Diagne-Erdmann

Abbildungen im Dokument:

[1] https://www.esa.int/Space_in_Member_States/Germany/Exklusiver_Beobachtungsplatz_fuer_Astronomen

[2] http://www.wissenschaft-schulen.de/sixcms/media.php/1308/Zentrales%20WiS%20Dokument%20SuW%201%202008.pdf

[3] https://blogs.esa.int/gaia/files/2013/09/L2_jacobi_surface_small2.jpg

[4] https://www.esa.int/ESA_Multimedia/Images/2006/11/Planck

[5] https://www.esa.int/Space_in_Member_States/Germany/Herschel_und_das_Infrarot-Universum

[6] https://www.mpa-garching.mpg.de/208118/CMB

[7] https://de.wikipedia.org/wiki/James-Webb-Weltraumteleskop#/media Datei:James_Webb_Space_Telescope_Mirrors_Will_Piece_Together_Cosmic_Puzzles_(30108124923).jpg

[8] https://de.wikipedia.org/wiki/James-Webb-Weltraumteleskop#/media/Datei:James_Webb_Space_Telescope_Mirrors_Will_Piece_Together_Cosmic_Puzzles_(30108124923).jpg

[9] https://web.archive.org/web/20100527230418/http://www.jwst.nasa.gov/images_artist13532.html

Grundlagen: Lagrange-Punkte

Bei den Lagrange-Punkten handelt es sich um fünf ausgezeichnete Punkte in einem System, bestehend aus zwei Himmelskörpern, z.B. ein Stern und ein ihn umkreisender Planet, an denen ein dritter Körper den Stern mit der gleichen Umlaufzeit umkreisen kann wie der Planet. Die Position relativ zu der beiden massereichen Himmelskörpern ändert sich dabei nicht. Die fünf Lagrange-Punkte stellen nun analytische Lösungen des sogenannten eingeschränkten Dreikörperproblems dar, d.h. die Masse des dritten Körpers wird vernachlässigt. Mathematisch sind diese Lösungen die Nullstellen des Gravitationsfeldes in demjenigen Bezugsystem, indem Stern und Planet ruhen. Folglich ergeben sich in einem nichtrotierendem Bezugssystem, die Lagrange-Punkte als synchron zu dem Planeten laufende Punkte auf einer Kreisbahn um das Zentralgestirn. Die Lagrange-Punkte L_1 bis L_5 liegen allesamt in der Bahnebene der Himmelskörper, wie in Abb. 1 schematisch gezeigt ist.

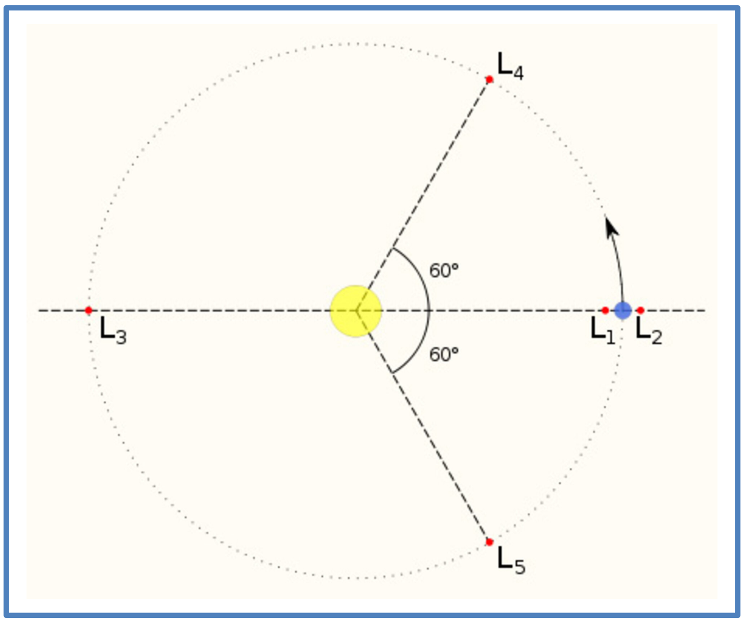


Abbildung 1: Lagrange-Punkte L_1 bis L_5 in Polardarstellung. [1]

In unserem Sonnensystem gibt es mehrere solcher Langrang'schen Systeme. So gibt es nicht nur das Sonne-Erde System, sondern z.B. auch das System Sonne-Jupiter. Die Lagrange-Punkte L_4 und L_5 sind dabei dynamisch stabile Punkte, was bedeutet, dass Objekte die dort „eingefangen" werden, dort ewig „gefangen" bleiben. Zum Beispiel findet man im Sonne-Jupiter System die Asteroidenfamilie der Trojaner. In den Punkten L_1 bis L_3 müssen gravitative Störungen, sogenannte Instabilitäten, durch kleinere Manöver korrigiert werden. Das liegt anschaulich daran, dass sich die Punkte L_1 bis L_3 zwischen zwei Äquipotentiallinien befinden, hingegen die Punkte L_4 und L_5 in einem geschlossenen Äquipotential liegen.

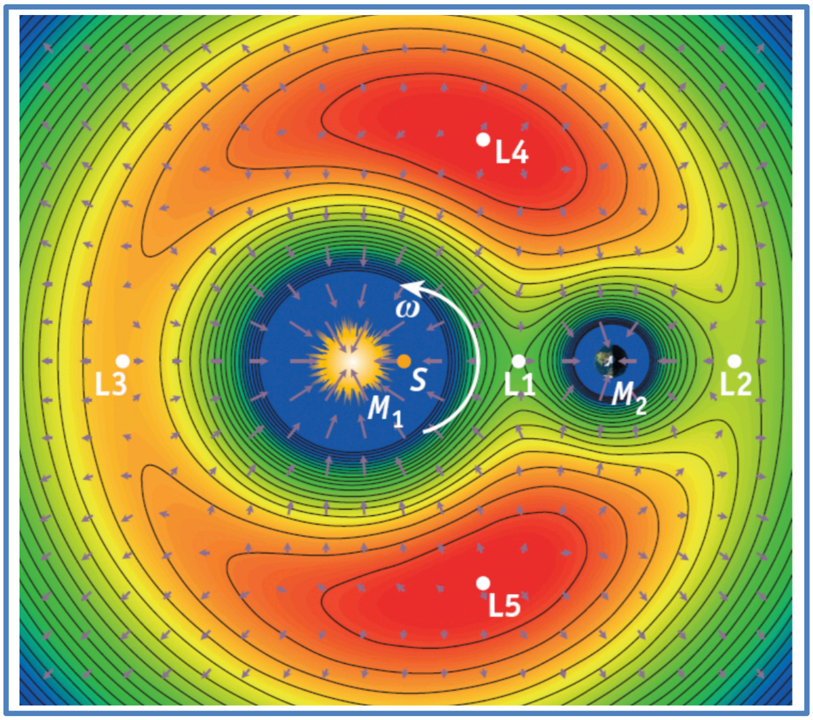


Abbildung 2: Darstellung der Lagrange-Punkte L_1 bis L_5 mit Äquipotentiallinien. [2]

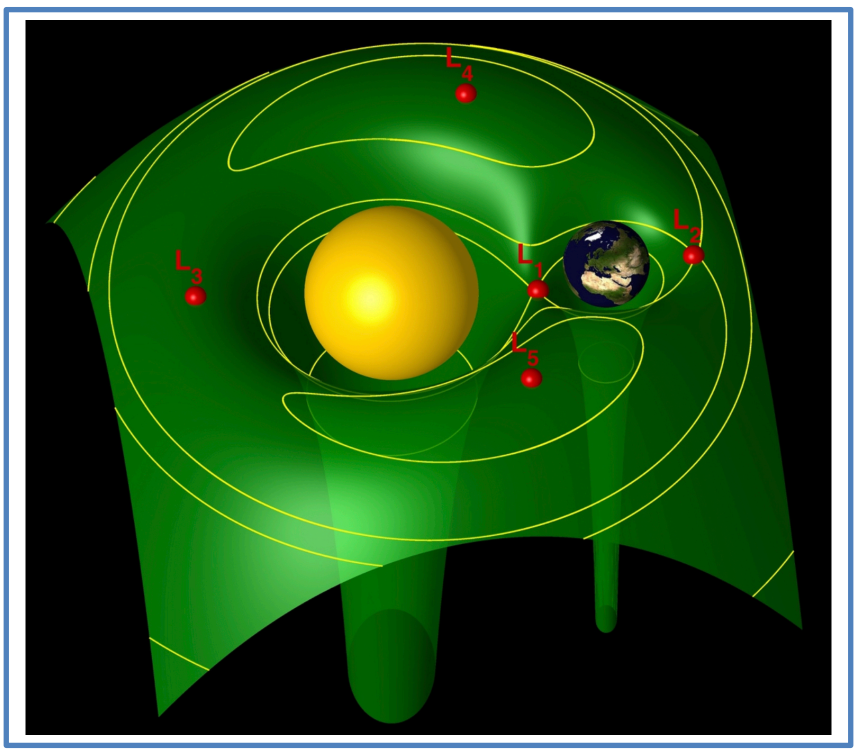


Abbildung 3: 3D-Darstellung der Lagrange-Punkte L_1 bis L_5. [3]

Um einen Satelliten von der Erde auf seine Umlaufbahn in der Höhe h über der Erdoberfläche zu bringen, muss ein bestimmtes Gravitationspotential überwunden werden. Nach der Energieerhaltung folgt für die dazu benötigte Geschwindigkeit

$$E_{kin} + E_{pot}(R_E) = E_{pot}(R_E + h) \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{2GM\left(\frac{1}{R_E} - \frac{1}{R_E + h}\right)} \,. \tag{1}$$

Befindet sich der Satellit auf seiner Höhe, so muss gelten:

$$F_Z = F_G \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{GM}{R}} \,. \tag{2}$$

Aus dem allgemeinen Zusammenhang

$$v = \frac{s}{t} \,, \tag{3}$$

folgt für die Zeit T eines vollen Umlaufs

$$T = \frac{s}{v} = \frac{s}{\sqrt{\frac{GM}{R}}} = \sqrt{\frac{s^2 R}{GM}} \,. \tag{4}$$

Mit der Strecke $s = 2\pi R$ ist somit

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 R^3}{GM}} \,. \tag{5}$$

Der Lagrange-Punkt L2, Herschel und Planck

Ein für die Astronomie besonders interessanter Ort ist der Lagrange-Punkt L_2. Er befindet sich von der Sonne aus gesehen etwa 1,5 Millionen Kilometer hinter der Erde. So wie sich die Erde im Laufe eines Jahres um die Sonne bewegt, so bewegen sich auch die an diesen Punkten positionierten Teleskope parallel mit der Erde um die Sonne. L_2 ist damit ein exklusiver Beobachtungsplatz. Im Laufe eines Jahres sind die Teleskope von L_2 aus in der Lage, den gesamten Himmel zu beobachten. Dabei sind die empfindlichen Instrumente stets im Schatten der Erde geschützt. Das wurde auch für die Weltraumteleskope *Herschel* und *Planck* ausgenutzt. Die Bezeichnung „Punkt" ist allerdings etwas irreführend. Die Teleskope sind im „Punkt" L_2 in Bewegung und stehen nicht still. Sie beschreiben komplizierte Flugbahnen (Orbits) um diesen imaginären Punkt. Dabei ist es so, dass die Bahnen der Satelliten je nach Entfernung von L_2 , sowie aufgrund weiterer Bedingungen sehr unterschiedlich sind.

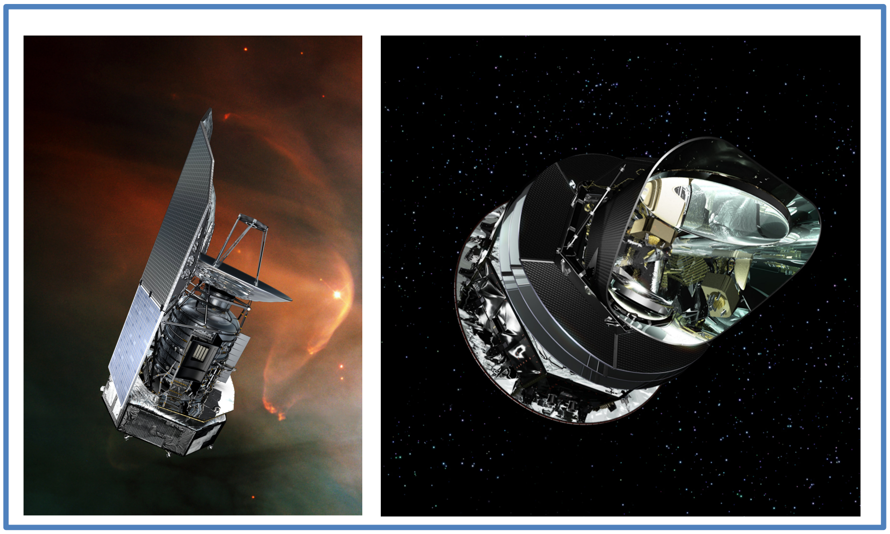


Abbildung 4: Die Weltraumteleskope Herschel (links) und Planck (rechts). [4][5]

Das Herschel Space Observatory ist ein von der ESA entwickeltes Weltraumteleskop. Zu seinen Aufgaben zählten die Untersuchung der Entstehung und Entwicklung von jungen Galaxien. Aufgrund des dortigen hohen Staubgehalts, strahlen diese hauptsächlich im Infrarot-Wellen-längenbereich. Weiter untersuchte Herschel die Physik und Chemie des interstellaren Mediums und auch Objekten außerhalb des Sonnensystems, wie Kometen und Atmosphären von Planeten.

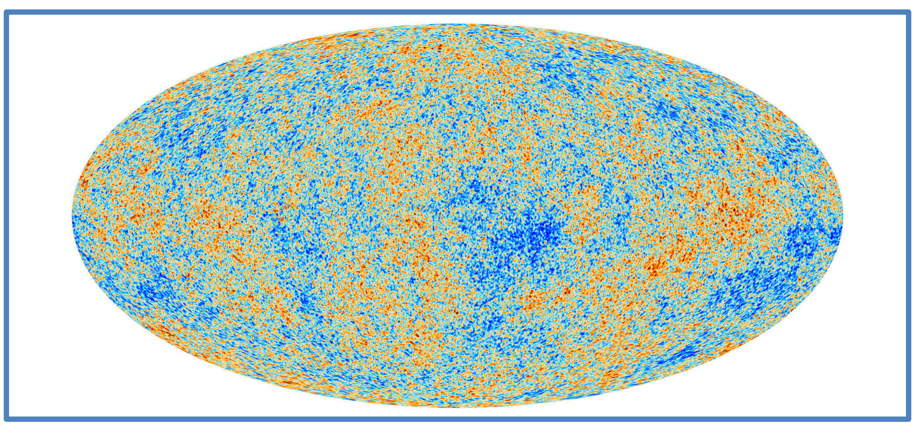


Abbildung 5: Mikrowellenhintergrund (CMB), wie er von Planck gesehen wurde. [6]

Das Planck-Weltraumteleskop war ein Weltraumteleskop, welches von der ESA für Untersuchungen im Mikrowellenbereich entwickelt wurde. Es diente insbesondere zur Erforschung des kosmischen Mikrowellenhintergrunds (CMB). Dabei handelt es sich um eine Strahlung, die aus der Frühzeit des Universums übrig ist. Die von Planck gewonnenen Daten führten zu Erkenntnissen über das Alter und die Zusammensetzung des Universums (Dunkle Materie, etc.) und haben herausragende Bedeutung für die Physik (insbesondere der Kosmologie) da sie die Urknalltheorie stützen. Die Entdeckung des CMB fand dabei eigentlich eher zufällig statt. Im Jahr 1964 testeten Arno Penzias und Robert Woodrow Wilson eine neue und für die damaligen Verhältnisse sehr empfindliche Antenne, welche eigentlich für Experimente mit Erdsatelliten gebaut worden war. Zunächst hielt man das empfangene Signal für eine Störung oder Dreck in der Antenne. Tatsächlich handelte haben sie den CMB entdeckt. Diese Entdeckung bescherte Penzias und Wilson letztendlich den Nobelpreis für Physik im Jahr 1978. Es ist dabei bemerkenswert, dass die Temperaturunterschiede, welche in Abb. 4 zu erkennen sind, lediglich wenige 10^{-4} Kelvin betragen. Der CMB ist annähernd isotrop.

James Webb Space Telescope (JWST)

Bei dem JWST handelt es sich um ein Gemeinschaftsprojekt von ESA, NASA und CSA. Nach einigen Verzögerungen ist der Start des JWST für den 18. Dezember 2021 geplant. Das Weltraumteleskop arbeitet im Infrarotbereich und ist daher besonders geeignet, um Licht aus weit entfernten und daher frühen Teilen des Universums zu untersuchen. Aufgrund der kosmologischen Rotverschiebung liegen solche Regionen genau im Spektrum von JWST.

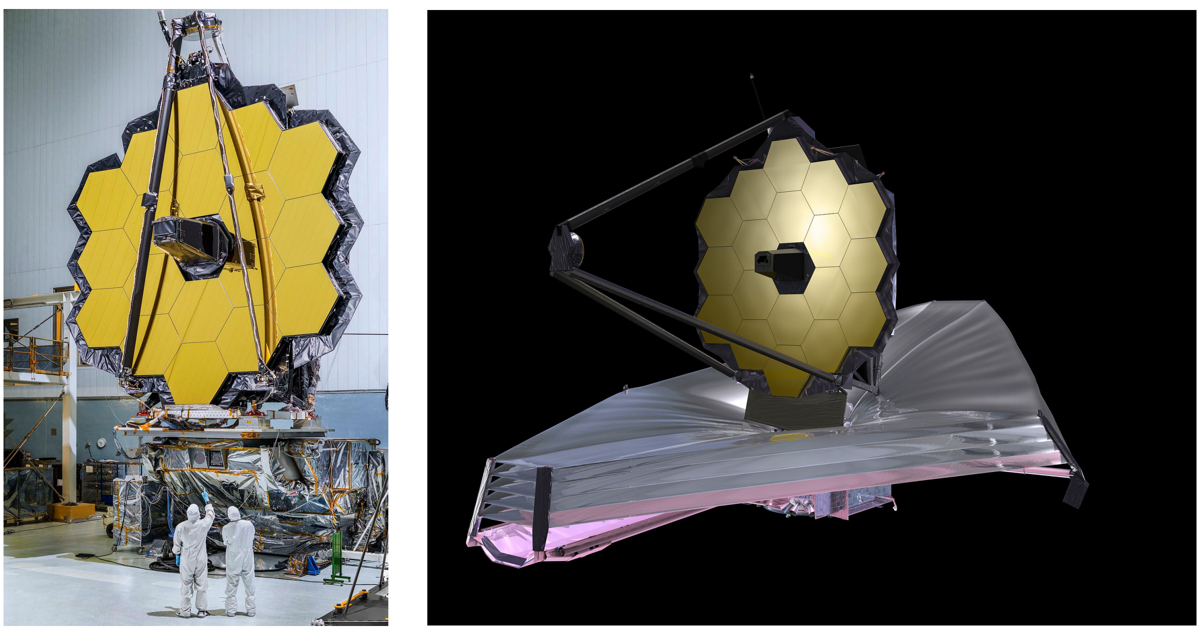


Abbildung 6: Das James Webb Space Telescope; Aufbau des Hauptspiegels (links), wie JWST bei der Arbeit aussehen wird (rechts). [8][9]

Der Lagrangepunkt L_2 ist dabei wieder von besonderem Interesse an dem JWST positioniert wird, um die zuvor erwähnten Vorzüge dort zu genießen. Insbesondere wird durch den schützenden Erdschatten ein weiter Blick in die Tiefen des Universums ermöglicht. Darüber hinaus ist JWST mit einer Vielzahl von Instrumenten, wie verschiedenen Spektrographen, Detektoren und Kameras, ausgestattet. Die Optik des Teleskop ist als sogenanntes Korsch-Teleskop aufgebaut und besteht aus mehreren (der Hauptspiegel aus insgesamt 18; siehe Abb. 6 (links)) Segmenten. Diese Segmente entfalten sich dabei erst im All. Dies ermöglicht eine effektive Brennweite von etwa 131,4 Meter.

Abbildungs- und Literaturverzeichnis

[1] https://www.esa.int/Space_in_Member_States/Germany/Exklusiver_Beobachtungsplatz_fuer_Astronomen

[2] http://www.wissenschaft-schulen.de/sixcms/media.php/1308/Zentrales%20WiS%20Dokument%20SuW%201%202008.pdf

[3] https://blogs.esa.int/gaia/files/2013/09/L2_jacobi_surface_small2.jpg

[4] https://www.esa.int/ESA_Multimedia/Images/2006/11/Planck

[5] https://www.esa.int/Space_in_Member_States/Germany/Herschel_und_das_Infrarot-Universum

[6] https://www.mpa-garching.mpg.de/208118/CMB

[7] https://de.wikipedia.org/wiki/James-Webb-Weltraumteleskop#/media Datei:James_Webb_Space_Telescope_Mirrors_Will_Piece_Together_Cosmic_Puzzles_(30108124923).jpg

[8] https://de.wikipedia.org/wiki/James-Webb-Weltraumteleskop#/media/Datei:James_Webb_Space_Telescope_Mirrors_Will_Piece_Together_Cosmic_Puzzles_(30108124923).jpg

[9] https://web.archive.org/web/20100527230418/http://www.jwst.nasa.gov/images_artist13532.html

Aktivität / aktive Teilnahme – Rechenbeispiele und Diskussion

Als aktive Teilnahme und zur Veranschaulichung rechnen die Schülerinnen und Schüler mit den gegebenen Formeln leichte Aufgaben zu Bahnradien, Geschwindigkeiten und Umlaufzeiten z.B. eines Satelliten und verstehen die Zusammenhänge. Bezugnehmend auf die Lagrange-Punkte kann diskutiert werden, was es überhaupt bedeutet an einem Punkt „gefangen“ zu sein und ob es überhaupt so etwas wie „feste Punkte“ im Universum geben kann.

Materialien

Taschenrechner, Schreibmaterialien (Stifte etc.).

Diskussion

Die Ergebnisse der Rechnungen sollen im Anschluss diskutiert werden.

Aufgabenbeispiel mit Lösungsskizze

Im folgenden sind einige beispielhafte Aufgaben mit Lösungsweg skizziert.

Aufgabe - Im Schwerefeld der Erde:

Um eine Rakete mit der Masse m_R in eine Höhe h über der Erdoberfläche zu befördern,

a) verifizieren Sie Gl.(1).

b) Berechnen Sie die Geschwindigkeit der Rakete für die Fälle

i) $h_1 = 250$ km
ii) $h_2 = R_E$
und vergleichen Sie die Ergebnisse.

Hinweis: Benutzen Sie $M_E = 5{,}9722 \cdot 10^{24}$ kg *und* $G = 6{,}67430 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2}$,
sowie $R_E = 6371$ km.

c) Benutzen Sie Gl.(4), um für die beiden Fälle aus b) die Umlaufzeit eines im Abstand r ausgesetzten Satelliten zu berechnen.

d) Berechnen Sie denjenigen Bahnradius, für den die Umlaufzeit $T = 24$ h beträgt, d.h. den geostationären Orbit.

Lösungsskizze:

a) Betrachten wir das Rakete-Erde-System als abgeschlossen, so gilt nach der

Energieerhaltung

$$E_{kin} + E_{pot}(R_E) = E_{pot}(R_E + h)\ .$$

Die kinetische Energie der Rakete ist

$$E_{kin} = \frac{m_R}{2} v^2$$

und die potentielle Energie auf der Erdoberfläche

$$E_{pot}(R_E) = -\, m_R G \frac{M_E}{R_E}\ .$$

Die potentielle Energie in der Höhe h über der Erdoberfläche ist dann entsprechend

$$E_{pot}(R_E + h) = -\, m_R G \frac{M_E}{R_E + h}\ .$$

Einsetzen und Umformen nach v ergibt

$$\frac{m_R}{2} v^2 = m_R G \frac{M_E}{R_E} - m_R G \frac{M_E}{R_E + h}$$

$$\Rightarrow v^2 = 2GM_E\left(\frac{1}{R_E} - \frac{1}{R_E + h}\right)$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{2GM_E\left(\frac{1}{R_E} - \frac{1}{R_E + h}\right)}\ .$$

b) i) $v = 2173{,}65$ m/s.

ii) $v = 7909{,}80$ m/s. Dies entspricht der ersten kosmischen Geschwindigkeit.

Vergleicht man die Werte der Rechnungen, so stellt man fest, dass für etwa 3 Prozent der Strecke bereits mehr als 25 Prozent der Geschwindigkeit benötigt werden.

c) Für den Fall aus b) i): $T \approx 1{,}6$ h.

Für den Fall aus b) ii): $T \approx 4{,}32$ h.

d) Wir stellen Gl.(4) nach $R = R_E + h$ um und erhalten

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 R^3}{GM_E}}$$

$$\Rightarrow R^3 = GM_E \frac{T^2}{4\pi^2}$$

$$\Rightarrow R = R_E + h = \left(GM_E \frac{T^2}{4\pi^2}\right)^{1/3}$$

$$\Rightarrow h = \left(GM_E \frac{T^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} - R_E\,.$$

Es folgt mit den Werten aus dem Hinweis in der Aufgabenstellung für die Höhe der geostationären Bahn $h \approx 35870{,}17$ km.